CADERNO DO BLOGUE

PROBLEMAS | TEOREMAS

AMÉRICO TAVARES

Índice

Data 6 Junho 2009.

1. Constante de Apéry

Roger Apéry (1916-1994) surpreendeu a comunidade matemática com a sua genial demonstração de que o número real representado pela série

$$\zeta(3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

é *irracional*. Escolheu para a apresentar a forma de uma conferência proferida em Junho de 1978 nas "Journées Arithmétiques" de Marseille-Luminy. Utilizou um método elementar, mas que estava repleto de fórmulas complexas e, na altura, inesperadas, sendo igualmente aplicável à série, conhecida de Euler (1707-1783),

$$\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots.$$

A exposição de Apéry foi acolhida com manifestações de dúvida, porventura pela estranheza provocada pela natureza das fórmulas, à primeira vista nada evidentes, e por utilizar essencialmente um método digno de Euler. Dois meses mais tarde, no Congresso Internacional de Matemáticos, H. Cohen fez uma exposição completa da demonstração, incorporando ideias suas e de D. Zagier e Apéry referiu a motivação que esteve por de trás do seu método.

Sob a forma escrita, a demonstração de Apéry pelo próprio data de 1979 [1] . A. van der Poorten publicou, também nesse ano, um relatório informal bastante pormenorizado e uma descrição muito viva destes acontecimentos [2] . F. Beukers apareceu, ainda em 1979, com uma elegante e mais curta demonstração da irracionalidade de $\zeta(3)$ [3] . Em homenagem a Apéry, a série $\zeta(3)$ passou a ser conhecida por **constante de Apéry**.

Como é sabido, os *números reais* podem ser classificados em *números racionais*, que são aqueles que podem ser expressos por fracções (ou razões) de *números inteiros* (por exemplo $5/2$) e os que não podem, os chamados *números irracionais* (por exemplo $\sqrt{2}, \pi, e$). Há dois tipos distintos de *irracionais*: os *algébricos* e os *transcendentes*. Os algébricos são zeros (ou raizes) de um polinómio de coeficientes racionais (por exemplo $\sqrt{2}$, visto que $x = \sqrt{2}$ verifica a equação $x^2 - 2 = 0$), os transcendentes não.

Não se sabe se a constante de Apéry, $\zeta(3)$, é transcendente. O mais conhecido de todos os irracionais, o π, é transcendente como foi demonstrado por F. Lindemann em 1882. A transcendência da base dos logaritmos naturais, e, foi provada em 1873 por C. Hermite. Quanto a $\zeta(2)$, Euler demonstrou que era igual a $\pi^2/6$, logo transcendente, porque todas as potências inteiras de π são transcendentes.

Euler, por analogia com a factorização de um polinómio de grau n com zeros $x_1, x_2, \cdots x_n$

$$P(x) = c\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\left(1 - \frac{x}{x_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_n}\right),$$

muito embora $\operatorname{sen} \pi x$ tenha uma infinidade de zeros ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), teve a intuição de aplicar este conceito a esta função (cujo desenvolvimento em série de Taylor é $\operatorname{sen} \pi x = \pi x/1! - (\pi x)^3/3! + (\pi x)^5/5! \mp \cdots$).

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \pi x &= \pi x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\cdots \\ &= \pi x\left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\cdots \end{aligned}$$

O factor π resulta de $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} \pi x)/x = \pi$. Igualando os coeficientes do termo em x^3, vem

$$\frac{1}{3!}\pi^3 = \pi\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \pi\zeta(2),$$

o que dá $\zeta(2) = \pi^2/6$. Embora não seja ainda uma verdadeira demonstração, Euler veio a efectuá-la mais tarde. Para $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4$, obteve o resultado $\pi^4/90$ e descobriu a fórmula geral de $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2n}$, que é um múltiplo racional de π^{2n}, isto é, $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ é racional. Daqui se conclui que $\zeta(2n)$ é transcendente.

Quanto a $\zeta(2n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2n+1}$, para $n \geq 2$, ainda não se conseguiu demonstrar a sua irracionalidade ou racionalidade. Mas já se sabe, por exemplo, que há uma infinidade de valores de $\zeta(2n+1)$ que são irracionais.

A função zeta de Riemann é tradicionalmente denotada por $\zeta(s)$, com s *complexo*. No Apêndice C serão apresentadas as propriedades básicas desta função. A função $y = \zeta(x)$ é definida nos *reais*, para $x > 1$ pela série

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Apresenta-se o respectivo gráfico para $x \leq 10$, onde se podem ver as duas assímptotas: a horizontal $y = 1$ e a vertical $x = 1$.

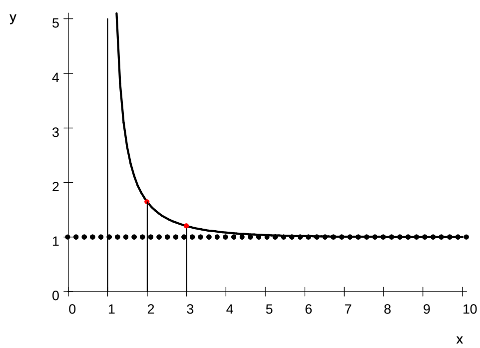


Gráfico de $\zeta(x)$

Esta última correspondente à série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, que se sabe ser divergente.

A estrutura geral da demonstração de Apéry baseia-se na construção de duas sucessões cuja razão u_n/v_n converge para $\zeta(3)$ por valores inferiores: uma de inteiros $(v_n)_{n\geq 0}$ e outra de racionais $(u_n)_{n\geq 0}$, as duas verificando a mesma relação de recorrência, mas geradas por condições iniciais distintas. A sucessão $(u_n)_{n\geq 0}$ é tal que multiplicando u_n pelo termo geral duma terceira sucessão de inteiros $(s_n)_{n\geq 0}$ se obtém o termo geral $q_n = s_n u_n$ de uma sucessão de inteiros $(q_n)_{n\geq 0}$. A aproximação racional a $\zeta(3)$, $u_n/v_n = p_n/q_n$ (com $p_n = s_n v_n$) tem uma velocidade tal que permite concluir a irracionalidade de $\zeta(3)$.

Na demonstração de Beukers, o raciocínio é semelhante, com a grande diferença das fórmulas definidoras das sucessões de inteiros e de racionais, que são dadas por integrais, enquanto que nas de Apéry aparecem coeficientes binomiais. Por exemplo,

$$v_n = \sum_{k=n}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

são os chamados *números de Apéry* (associados a $\zeta(3)$).

Numericamente, tem-se

$$\zeta(3) = 1,202056903\ldots,$$

e

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934\ldots.$$

2. Somas

2.1. Somas telescópicas. Suponhamos que o somando a_i é decomponível numa diferença $A_{i+1} - A_i$. Então,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} A_{i+1} - A_i = \sum_{i=0}^{n} A_{i+1} - \sum_{i=0}^{n} A_i.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n} A_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) + A_{n+1} = A_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = A_0 + \sum_{i=0}^{n} A_i$$

vem

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = A_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} A_i - A_0 - \sum_{i=0}^{n} A_i = A_{n+1} - A_0.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i &= \sum_{i=m}^{n} A_{i+1} - A_i = \sum_{i=m}^{n} A_{i+1} - \sum_{i=m}^{n} A_i = \sum_{i=m+1}^{n+1} A_i - \sum_{i=m}^{n} A_i \\
&= A_{n+1} + \sum_{i=m+1}^{n} A_i - \sum_{i=m}^{n} A_i = A_{n+1} + \sum_{i=m+1}^{n} A_i - \left(\sum_{i=m+1}^{n} A_i\right) - A_m \\
&= A_{n+1} - A_m.
\end{aligned}$$

ou seja, se $a_i = A_{i+1} - A_i$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i &= \sum_{i=m}^{n} A_{i+1} - A_i = A_{n+1} - A_m. \\
\text{ou } \sum_{i=m}^{n-1} a_i &= \sum_{i=m}^{n-1} A_{i+1} - A_i = A_n - A_m;
\end{aligned}$$

Quando A_i é uma sucessão crescente, a diferença é positiva. Se $a_i = A_i - A_{i+1}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} a_i &= \sum_{i=m}^{n} A_i - A_{i+1} = A_m - A_{n+1}. \\ \text{ou} \sum_{i=m}^{n-1} a_i &= \sum_{i=m}^{n-1} A_i - A_{i+1} = A_m - A_n.\end{aligned}$$

Agora, quando A_i é decrescente, a diferença é positiva.

Exemplo 2.1. *Calcular a soma* $\sum_{i=1}^{n} a_i$*,*

(1) *sendo* $a_i = A_i - A_{i+1}$ *e* A_i *dado por*
   (a) i^{-1};
   (b) i;
   (c) i^{-2};
   (d) i^2.
(2) *sendo* $a_i = A_{i+1} - A_i$ *e* A_i *dado como em* 1.

1. Aplicamos as ideias acabadas de expor.
   (a) Como

$$a_i = A_i - A_{i+1} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i\,(i+1)},$$

vem

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} A_i - A_{i+1} = A_1 - A_{n+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

   (b) Neste caso, tem-se

$$a_i = A_i - A_{i+1} = i - (i+1) = -1$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} A_i - A_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} i - (i+1) = \sum_{i=1}^{n} -1 \\ &= A_1 - A_{n+1} = 1 - (n+1) = -n\end{aligned}$$

o que dá o resultado evidente

$$\sum_{i=1}^{n} -1 = -n.$$

c. Agora,

$$a_i = A_i - A_{i+1} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2},$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{n} A_i - A_{i+1} = A_1 - A_{n+1} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}.$$

d. Tem-se

$$a_i = A_i - A_{i+1} = i^2 - (i+1)^2 = i^2 - i^2 - 2i - 1 = -2i - 1$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} A_i - A_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} i^2 - (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n} -(2i+1) \\ &= A_1 - A_{n+1} = 1^2 - (n+1)^2 = -n^2 - 2n,\end{aligned}$$

novamente evidente, porque já vimos que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$. Por conseguinte,

$$\sum_{i=1}^{n} -(2i+1) = -n(n+1).$$

2.2. **Anti-diferenças e método de adição por partes.**

2.2.1. *Anti-diferenças.* Se tivermos um somando (real) a_i, podemos tentar obter para cada i um outro real A_i tal que $a_i = A_{i+1} - A_i$. Se o conseguirmos, o que *na maioria dos casos práticos é extremamente difícil*, podemos então calcular facilmente $\sum_{i=m}^{n} a_i$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} A_{i+1} - A_i = A_{n+1} - A_m = A_i\Big|_{i=m}^{i=n+1}. \tag{2.1}$$

À sucessão (A_i) chama-se *anti-diferença* da sucessão (a_i).

Claro que o processo inverso é, em geral, fácil: partindo do conhecimento de A_i calcula-se por diferença a_i: $a_i = A_{i+1} - A_i$.

No exemplo obtiveram-se os seguintes pares (A_i, a_i) de anti-diferenças e diferenças, aos quais se acrescentou o último par da tabela, que é justificado já a seguir:

Anti-diferença de a$_i$	**Diferença a$_i$**
$\mathbf{A}_i$	$\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{i+1} - \mathbf{A}_i$
i^{-1}	$-\left[i\left(i+1\right)\right]^{-1}$
i	1
i^{-2}	$-\left(2i+1\right)\left[i^2\left(i+1\right)^2\right]^{-1}$
i^2	$2i+1$

Tabela de anti-diferenças

2.2.2. *Método de adição por partes.* Vamos deduzir uma fórmula que pode ajudar a calcular certas somas, recorrendo a outras conhecidas. Suponhamos que temos um produto

$$C_i = A_i B_i.$$

Então, dado que $A_i B_{i+1} - A_i B_{i+1} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
c_i &= C_{i+1} - C_i \\
&= A_{i+1}B_{i+1} - A_i B_i \\
&= A_{i+1}B_{i+1} - A_i B_i + \left(A_i B_{i+1} - A_i B_{i+1}\right) \\
&= \left(A_{i+1}B_{i+1} - A_i B_{i+1}\right) + \left(A_i B_{i+1} - A_i B_i\right) \\
&= \left(A_{i+1} - A_i\right) B_{i+1} + A_i \left(B_{i+1} - B_i\right) \\
&= a_i B_{i+1} + A_i b_i,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_i = C_{i+1} - C_i = a_i B_{i+1} + A_i b_i. \tag{2.2}$$

Esta regra faz imediatamente lembrar a da diferenciação de um produto. Escrevamo-la na forma

$$a_i B_{i+1} = c_i - A_i b_i = C_{i+1} - C_i - A_i b_i, \tag{2.3}$$

e somemos em i:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i B_{i+1} &= \sum_{i=m}^{n} c_i - \sum_{i=m}^{n} A_i b_i \\
&= \sum_{i=m}^{n} \left(C_{i+1} - C_i\right) - \sum_{i=m}^{n} A_i b_i.
\end{aligned}$$

Atendendo à fórmula da soma telescópica

$$\sum_{i=m}^{n} C_{i+1} - C_i = C_{n+1} - C_m = C_i\big|_{i=m}^{i=n+1} = A_i B_i\big|_{i=m}^{i=n+1},$$

vem

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n} a_i B_{i+1} &= A_i B_i|_{i=m}^{i=n+1} - \sum_{i=m}^{n} A_i b_i \\ \text{ou} \qquad \sum_{i=m}^{n} A_i b_i &= A_i B_i|_{i=m}^{i=n+1} - \sum_{i=m}^{n} a_i B_{i+1}. \end{aligned}$$

Como vemos, obtivemos uma fórmula que nos faz lembrar o método de integração por partes. Assim, para somar por partes um produto decomponível em dois factores, um dos quais é uma anti-diferença, é necessário obter a anti-diferença do outro factor. Se o conseguirmos, facilmente achamos o valor da soma.

Exemplo 2.2. *Determinar, em função de n e de*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

conhecido por número harmónico de ordem n,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}.$$

Pomos

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{i(i+1)} \\ \text{e} \qquad B_{i+1} &= i^2. \end{aligned}$$

Consultando a tabela de anti-diferenças da secção anterior, obtemos A_i e de B_{i+1} calculamos B_i:

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{1}{i} \\ B_i &= (i-1)^2 = i^2 - 2i + 1 \end{aligned}$$

e, portanto, como

$$b_i = B_{i+1} - B_i = 2i - 1,$$

tem-se

$$\begin{aligned} A_i b_i &= -\frac{1}{i}(2i-1) = \frac{1}{i} - 2 \\ A_i B_i &= -\frac{1}{i}\left(i^2 - 2i + 1\right) = -i + 2 - \frac{1}{i}; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} &= \left(-i+2-\frac{1}{i}\right)\Big|_{i=1}^{i=n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 2 \\
&= -n-1+1+0-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1}-H_n+2n \\
&= n+1-\frac{1}{n+1}-H_n \qquad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Se escrevermos a soma numa forma indefinida, ou seja, sem indicação explícita dos limites superior e inferior dos somatórios,

$$\sum a_i B_{i+1} = A_i B_i - \sum A_i b_i,$$

relacionamos duas *somas indefinidas*: $\sum a_i B_{i+1}$ e $\sum A_i b_i$. Nesta fórmula, aparecem as anti-diferenças A_i e B_i e as diferenças $a_i = A_{i+1} - A_i$ e $b_i = B_{i+1} - B_i$.

A forma indefinida traduz-se na *soma indefinida*

$$\sum a_i = A_i.$$

2.3. **Exercícios.**

2.3.1. *Enunciados.*

(1) Apresente um argumento combinatório justificativo da identidade de Pascal.
(2) Sendo A um conjunto com n elementos, seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A;
   (a) determine o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$;
   (b) relacione com o teorema binomial e com o triângulo de Pascal.
(3) Calcule, em função de n, o valor da soma $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{2} = \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2}$.
(4) Mostre que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$
   (a) pelo teorema binomial;
   (b) através dum argumento meramente combinatório (sem fazer cálculos ou dedução a partir de outras fórmulas)
(5) Mostre que a anti-diferença da sucessão (2^i) é a própria sucessão. Utilize este resultado para determinar $\sum_{i=1}^{n} 2^i$.
(6) Calcule a soma da progressão geométrica $\sum_{i=1}^{n} x^i$, utilizando o método telescópico.
(7) Some por partes

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i.$$

2.3.2. *Resoluções.* **1.** A identidade de Pascal é

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Pensemos em dois conjuntos, um $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com n elementos e outro, B arbitrário mas contido em A e com $n-1$ elementos: $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\} \subset A$. Escolhamos agora k elementos de entre os n de A. A contagem do número de maneiras distintas de escolher esses k elementos pode fazer-se de duas formas:

- uma, directa, expressa por $\binom{n}{k}$;
- outra, indirecta, baseada no seguinte raciocínio: os k elementos escolhidos ou pertencem todos ao conjunto B (*caso 1*) ou todos menos um, ou seja, $k-1$ pertencem a B e o que não faz parte de B pertence a A (*caso 2*). Existem $\binom{n-1}{k}$ escolhas distintas no caso 1 e $\binom{n-1}{k-1}$ no 2. Somando $\binom{n-1}{k}$ com $\binom{n-1}{k-1}$ obtem-se o número total de escolhas associadas aos *dois casos*. Mostrámos assim que os dois lados da identidade de Pascal são iguais. ◀

2.(a) Consideremos um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com n elementos. Os subconjuntos de A podem ter k elementos, com k podendo variar de 0 a n (a 0 corresponde o conjunto vazio $\emptyset$ e a n o conjunto A). Para um dado k, há $\binom{n}{k}$ subconjuntos de A. A soma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{2.4}$$

representa o número pedido (n^o de elementos ou cardinal de $\mathcal{P}(A)$). Pela fórmula do binómio, tem-se

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{2.5}$$

Pondo $x = 1$ em (2.4), temos o caso particular

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \iff 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

que é a resposta pretendida.

2.(b) No triângulo de Pascal os números $\binom{n}{k}$ estão colocados ao longo da linha n.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\textit{Linha } n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
\textit{Linha } n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
\textit{Linha } n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\textit{Linha } n & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{k} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

A sua soma é dada por (2.4) ◀

3. Dado que

$$\binom{i}{2} = \frac{i\,(i-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(i^2 - i\right),$$

se pensarmos nos resultado obtidos nas alíneas (d) e (a) do exemplo 1.2.1, respectivamente

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)\,n\,(2n+1)}{6}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2}\left(i^2 - i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} i^2 - i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{1} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)\,n\,(2n+1)}{6} - \frac{n\,(n+1)}{2}\right) = \frac{n^3 - n}{6}. \qquad ◀
\end{aligned}$$

4.(a) Fazendo $x = -1$ no teorema binomial

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0;$$

podemos substituir a *variável muda* k por i:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

4.(b) Consideremos um conjunto A com n elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e outro $B \subset A$ com $n-1$ elementos, isto é, retiramos a A um qualquer dos seus elementos; n ou é ímpar ou par:

- se n é ímpar, a cada subconjunto de A com um número ímpar de elementos corresponde o seu complementar com um número ímpar de elementos. Por exemplo, se $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, temos os seguintes quatro pares de subconjuntos

$$(\emptyset, A), (\{a_1\}, \{a_2, a_3\}), (\{a_2\}, \{a_1, a_3\}), (\{a_3\}, \{a_1, a_2\}).$$

  Vemos que A tem, portanto, o *mesmo número de subconjuntos com um número ímpar de elementos e de subconjuntos com um número par* (2^{n-1}, uma vez que 2^n é o número total de subconjuntos de A (ver exercício 2.(a));
- se n é par, então é B que tem o mesmo número de subconjuntos com um número ímpar de elementos e de subconjuntos com um número par (2^{n-2}, pois 2^{n-1} é o número total de subconjuntos de B); logo, o número de subconjuntos de A (2^n) é o dobro do de B, *metade dos quais têm um número ímpar de elementos e a outra metade um número par.*

Sendo assim, quer n seja par quer seja ímpar, *o número de subconjuntos de A com um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos igualmente de A, mas com um número par*, isto é,

$$\sum_{\substack{i=0\\ i \text{ par}}}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ ímpar}}}^{n} \binom{n}{i} = 0.$$

Agora, reparando que o lado esquerdo desta igualdade se pode escrever como $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$, fica demonstrada a identidade do enunciado. ◀

Nota: esta justificação fica, no entanto, dependente do teorema binomial, que não foi demonstrado através de um argumento meramente combinatório. Convidamos o leitor a experimentar fornecer um tal argumento.

5. Basta reparar que $2^{i+1} - 2^i = 2^i(2-1) = 2^i$. Ou seja, se $A_i = 2^i$, então $a_i = A_{i+1} - A_i = 2^i$.

Assim sendo, aplicando a fórmula da soma telescópica, vem

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} - 2^i = 2^{n+1} - 2 = 2\left(2^n - 1\right) \qquad ◀$$

6. Como

$$x^{i+1} - x^i = x^i\left(x-1\right) \iff \frac{x^{i+1} - x^i}{x-1} = x^i \qquad \text{para } x \neq 1,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x^i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i+1}-x^i}{x-1} = \frac{1}{x-1}\sum_{i=1}^{n} x^{i+1}-x^i \\ &= \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1}-x\right) = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}.\end{aligned}$$

Para $x = 1$, vem, como sabemos,

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n. \qquad \blacktriangleleft$$

7. Para somar por partes

$$\sum_{i=1}^{n} i\,2^i = \sum_{i=1}^{n} 2^i i,$$

é necessário analisar o somando $i\,2^i$. Como 2^i é a anti-diferença de 2^i e a diferença de i é 1, a soma acima é da seguinte forma (ver adição por partes):

$$\sum_{i=m}^{n} a_i B_{i+1} = A_i B_i|_{i=m}^{i=n+1} - \sum_{i=m}^{n} A_i b_i,$$

em que

$$a_i = 2^i \qquad B_{i+1} = i;$$

donde

$$A_i = 2^i \qquad B_i = i-1 \qquad b_i = B_{i+1} - B_i = i - (i-1) = 1;$$

assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i\,2^i &= \left[2^i\,(i-1)\right]|_{i=1}^{i=n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i \times 1 \\ &= \left(2^{n+1}\,(n) - 2\times 0\right) - 2\,(2^n-1) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\ &= 2^{n+1}\,(n-1) + 2. \qquad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

3. A note on a combinatorial identity related to the Apéry's constant $\zeta(3)$

3.1. **Introduction.** In his proof of the irrationality of $\zeta(3)$, Roger Apéry used two double sequences, whose first terms are shown in section 3. Apéry's method of constructing these sequences is presented in his article [1] *Irrationalité de* $\zeta 2$ *et* $\zeta 3$, Astérisque 61 (1979) p. 11-13, and in much more detail by Alfred van der Poorten [2] in his informal report *A proof that Euler missed ...*, Math. Intelligencer 1 (1979), p. 195-203.

In section 4 of [2], the 5 transformations presented by Apéry in the Journées Arithmétiques de Luminy held in June 1978, which enabled him to accelerate the convergence of a sequence, $u_{n,k}$ are described. This sequence is given by

$$u_{n,k}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m^3\binom{n}{m}\binom{m+n}{m}}. \tag{3.1}$$

Observação 3.1. *In van der Poorten's paper this sequence is denoted as $c_{n,k}$ and as $u_{k,n}$ by Apéry in the aforementioned article.*

Applying exactly the same transformations, that is, the same linear combination to the double sequences $\binom{n+k}{n}$ and $\binom{n+k}{n}u_{n,k}=v_{n,k}$, two other sequences, respectively, (u_n) and (v_n) are generated. These are given by

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{k} && (3.2)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2, \text{ with } 0\le k\le i\le n && (3.3)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{k}u_{n,n-k} && (3.4)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 u_{n,k}, \text{ with } 0\le k\le i\le n && (3.5)\end{aligned}$$

We present here the following identity

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$$

that enables one to show that (3.2) is identical to (3.3) and (3.4) is identical to (3.5) (see section 4).

3.2. **Proof of the identity.** We are going to prove

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} \tag{3.6}$$

Observação 3.2. *We can choose for i the minimum value k, instead of 0 , because, when $i<k$, $\binom{i}{k}=0$.*

This identity generalizes the identity

$$\sum_{k}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

for which two different proves are given by M. Petkovsek, H. Wilf and D. Zeilberger in the book A=B, p. 24, [5], (a purely combinatorial proof and one based on the Newton's binomial formula).

We will present two purely combinatorial arguments to evaluate the value of each side of identity (3.6). Both values must, of course, be equal.

The right hand side is the number of different ways of choosing k elements from a set, such as $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ with n elements and, at the same time, n elements from another set $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n-k}\}$ with $2n-k$ elements.

As for the left hand side, let's first consider the disjunction of X in two sets, one $X_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ with n elements, and the other $X_2 = \{x_{n+1}, \cdots, x_{2n-k}\}$, with $n-k$ elements, and $X = X_1 \cup X_2$. Now, we choose n elements of X such as $k\prime$ belongs to X_1 and $n-k\prime$ to X_2, with $0 \leq k\prime \leq n$.

(1) There exists $\binom{n}{k\prime}$ different ways of choosing $k\prime$ elements from the n of X_1 .

(2) There exists $\binom{n-k}{n-k\prime} = \binom{n-k}{k\prime-k}$ different ways of choosing $n-k\prime$ elements from the $n-k$ of X_2 .

From here we deduce that , for a given $k\prime$, there are $\binom{n}{k\prime}\binom{n-k}{k\prime-k}$ different ways of choosing those n elements of X. On the other hand, $\binom{n}{k\prime}\binom{n-k}{k\prime-k}\binom{n}{k}$ is the number of different ways of choosing n elements from X and, at the same time, k from S , as above. Now, if we add, for every possible value of $k\prime$, all those such chooses, then

$$\begin{aligned}\sum_{k\prime=0}^{n}\binom{n}{k\prime}\binom{n-k}{k\prime-k}\binom{n}{k} &= \sum_{k\prime=0}^{n}\binom{n}{k\prime}^2\binom{k\prime}{k}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{i}{k}\\ &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{i}{k},\end{aligned}$$

since $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k\prime-k} = \binom{n}{k\prime}\binom{k\prime}{k}$, by the Newton's identity. It can be established by a combinatorial argument (see [6] V.K., Md. Balakrishnan, V. Balakrishnan, *Schaum's Outline of Combinatorics,* p. 12).

Instead, we show it as follows

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k\prime-k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(k\prime-k)!\,(n-k\prime)!}\\ &= \frac{n!}{k!\,(k\prime-k)!\,(n-k\prime)!}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\binom{n}{k\prime}\binom{k\prime}{k} &= \frac{n!}{k\prime!\,(n-k\prime)!}\frac{k\prime!}{k!\,(k\prime-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!\,(k\prime-k)!\,(n-k\prime)!}\end{aligned}$$

We have therefore shown the equality of both sides of the identity (3.6) and so completed the proof. □

3.3. **First Terms of Apéry's Sequences.** Now, we are going to illustrate numerically the construction of the Apéry's Sequences, by applying the **transformations** described in [2]. We decided to display these sequences as Pascal-like triangles.

3.4. **Integer sequence** (u_n)**.** The first triangle for this sequence has as elements the values generated by the binomial coefficient $\binom{n+k}{n}$. *For the* $n-$ *th line, these values are obtained for* $k=0$ *to* n*.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 3 & & 6 & \\ 1 & & 4 & & 10 & & 20\end{array}$$

The following triangles are (*in each,* n *defines a line for which the second index of the generating expression is comprised between* 0 *and* n*.*)

$\boxed{1}$ Substitution of k by $n-k$: $\binom{2n-k}{n}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & 6 & & 3 & & 1 & \\ 20 & & 10 & & 4 & & 1\end{array}$$

$\boxed{2}$ $\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & 6 & & 6 & & 1 & \\ 20 & & 30 & & 12 & & 1\end{array}$$

$\boxed{3}$ $\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \qquad 3 \\ 6 \qquad 12 \qquad 19 \\ 20 \qquad 50 \qquad 92 \qquad 147 \end{array}$$

$\boxed{4}$ $\binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \qquad 3 \\ 6 \qquad 24 \qquad 19 \\ 20 \qquad 150 \qquad 276 \qquad 147 \end{array}$$

$\boxed{5}$ $\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}\binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \qquad 5 \\ 6 \qquad 30 \qquad 73 \\ 20 \qquad 170 \qquad 596 \qquad 1445 \end{array}$$

From here, we get the first 4 terms of (u_n)

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 5 \qquad u_2 = 73 \qquad u_3 = 1445 \tag{3.7}$$

3.4.1. *Rational sequence* (v_n). The first triangle for this sequence has as elements the values generated by $\binom{n+k}{n} u_{n,k} = v_{n,k}$. *For the* $n-$*th line, these values are obtained for* $k = 0$ *to* n.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \qquad \frac{5}{2} \\ \frac{9}{8} \qquad \frac{29}{8} \qquad \frac{115}{16} \\ \frac{251}{216} \qquad \frac{130}{27} \qquad \frac{5191}{432} \qquad \frac{5195}{216} \end{array}$$

It is transformed into the following ones, by applying exactly the same transformations; again, n *generates a line, for which the second index is comprised between* 0 *and* n.

$\boxed{1}$ Substitution of k by $n-k$: $\binom{2n-k}{n} u_{n,n-k}$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \frac{5}{2} \qquad 1 \\ \frac{115}{16} \qquad \frac{29}{8} \qquad \frac{9}{8} \\ \frac{5195}{216} \qquad \frac{5191}{27} \qquad \frac{130}{432} \qquad \frac{251}{216} \end{array}$$

$\boxed{2}$ $\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} u_{n,n-k}$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \frac{5}{2} \qquad 1 \\ \frac{115}{16} \qquad \frac{29}{4} \qquad \frac{9}{8} \\ \frac{5195}{216} \qquad \frac{5191}{144} \qquad \frac{130}{9} \qquad \frac{251}{216} \end{array}$$

$\boxed{3}$ $\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} u_{n,n-k}$

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\frac{5}{2} \qquad \frac{7}{2} \\
\frac{115}{16} \qquad \frac{231}{16} \qquad \frac{365}{16} \\
\frac{10390}{432} \qquad \frac{25963}{432} \qquad \frac{47776}{432} \qquad \frac{76331}{432}
\end{array}
$$

Observação 3.3. *The denominators of the rationals calculated so far are equal to $2d_n^3$, where $d_n = \operatorname{lcm}(1, 2, \cdots, n)$.*

$\boxed{4}$ $\binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} u_{n,n-k}$

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\frac{5}{2} \qquad \frac{7}{2} \\
\frac{115}{16} \qquad \frac{462}{16} \qquad \frac{365}{16} \\
\frac{10390}{432} \qquad \frac{77889}{432} \qquad \frac{143328}{432} \qquad \frac{76331}{432}
\end{array}
$$

$\boxed{5}$ $\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}\binom{n}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} u_{n,n-k}$

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\frac{5}{2} \qquad \frac{12}{2} = 6 \\
\frac{115}{16} \qquad \frac{577}{16} \qquad \frac{1404}{16} = \frac{351}{4} \\
\frac{10390}{432} = \frac{5195}{216} \qquad \frac{88279}{432} \qquad \frac{2673}{432} \qquad \frac{62531}{36}
\end{array}
$$

From here, we get the first 4 terms of (v_n)

$$v_0 = 0 \qquad v_1 = 6 \qquad v_2 = \frac{351}{4} \qquad v_3 = \frac{62531}{36} \tag{3.8}$$

Let's see how fast the convergence to $\zeta(3)$ of the sequence generated by $\frac{v_n}{u_n}$ really is

$$\frac{v_0}{u_0} = 0 \qquad \frac{v_1}{u_1} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\frac{v_2}{u_2} = \frac{351}{292} \approx 1.20205479452055$$

$$\frac{v_3}{u_3} = \frac{62531}{52020} \approx 1.20205690119185$$

For this last approximation, we have already

$$\left| \frac{v_3}{u_3} - \zeta(3) \right| \approx 0.00000000196774$$

We have taken

$$\zeta(3) \approx 1.20205690315959$$

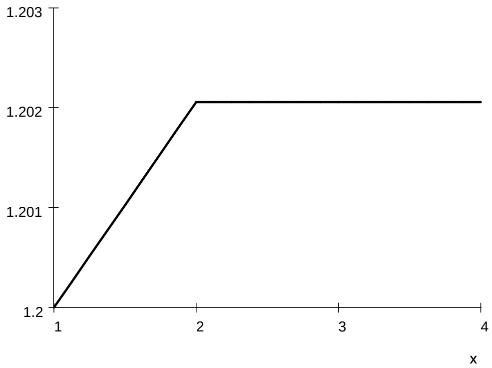
For the next term, we have

$$\frac{v_4}{u_4} = \frac{11424695}{9504288},$$

and

$$\left|\frac{v_4}{u_4}-\zeta(3)\right|\approx 0.00000000000177.$$

In order to have a visual representation of these approximations, let's plot the graph of a function f of a real variable x such that $f(n)=v_n/u_n$ and $f(x)=(v_n/u_n-v_{n-1}/u_{n-1})(x-n)+v_n/u_n$ in the interval $[n-1,n]$, which is simply equal to v_n/u_n at the integers and to the linear function of the line segment connecting $(n-1,v_{n-1}/u_{n-1})$ to $(n,v_n/u_n)$ in each of such intervals .



Graph of $f(x)$ in $[1,4]$ approaching $\zeta(3)$

These approximations compare favorably with the partial sums $s_n=u_{n,0}=\sum_{m=1}^{n}1/m^3$

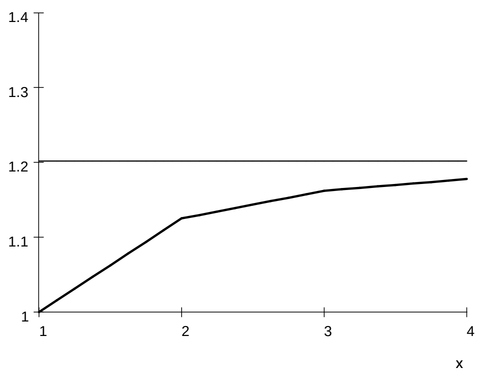
$$s_1=u_{1,0}=1$$

$$s_2=u_{2,0}=1+\frac{1}{2^3}=\frac{9}{8}$$

$$s_3=u_{3,0}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}=\frac{251}{216}$$

$$s_4=u_{4,0}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}=\frac{2035}{1728}$$

In this case we plot the graph of a function g of a real variable x such that $g(n)=s_n$ and $g(x)=(s_n-s_{n-1})(x-n)+s_n$ in the interval $[n-1,n]$, which is equal to s_n at the integers and to the linear function of the line segment connecting $(n-1,s_{n-1})$ to (n,s_n) in each of such intervals .



Graph of $g(x)$ in $[1,4]$ and $\zeta(3)$

3.4.2. *Double Sequence* $(u_{n,k})$. We will now arrange sequence (1) in a Pascal-like triangle:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & u_{0,0}=0 & & & \\ & & u_{1,0}=1 & & u_{1,1}=\frac{5}{4} & & \\ & u_{2,0}=\frac{9}{8} & & u_{2,1}=\frac{29}{24} & & u_{2,2}=\frac{115}{96} & \\ u_{3,0}=\frac{251}{216} & & u_{3,1}=\frac{65}{54} & & u_{3,2}=\frac{5191}{4320} & & u_{3,3}=\frac{5195}{4320} \end{array}$$

For instance, in the 4th line we have the following inequalities

$$u_{3,0} < u_{3,2} < \zeta(3) < u_{3,3} < u_{3,1}$$

that is, $[u_{3,2}\ ,\ u_{3,3}] \subset [u_{3,0}\ ,\ u_{3,1}]$ and $\zeta(3) - u_{3,0}$ is positive, $\zeta(3) - u_{3,1}$ negative, $\zeta(3) - u_{3,2}$ positive, and $\zeta(3) - u_{3,3}$ negative. Similar results can be established for the other lines.

3.4.3. *Proved identity.* The first 5 lines of

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} \tag{3.9}$$

are

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 1 & & & \\ & & 6 & & 6 & & 1 & & \\ & 20 & & 30 & & 12 & & 1 & \\ 70 & & 140 & & 90 & & 20 & & 1 \end{array}$$

3.5. **Equivalent formulas for u_n and v_n.** Now we will derive formulas (3) and (5) from, respectively, (2) and (4).

3.5.1. *Formula for u_n.* From (3.2), that we repeat here

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \tag{3.10}$$

one has, using the proved identity

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}^2 \binom{i}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} && (3.11) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \binom{i}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2n-k}{n}^2 && (3.12) \end{aligned}$$

Replacing $n-k$ for k, we obtain

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{n-k=0}^{n-k=0} \binom{n}{n-k}^2 \binom{2n-n+k}{n}^2 && (3.13) \\ &= \sum_{k=n}^{k=0} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 && (3.14) \end{aligned}$$

3.5.2. *Formula for v_n.* From (3.4), that we repeat here

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} u_{n,n-k} \tag{3.15}$$

one gets, using the proved identity as well,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}^2 \binom{i}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} u_{n,n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \binom{i}{k} u_{n,n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} u_{n,n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2n-k}{n}^2 u_{n,n-k} && (3.16) \end{aligned}$$

Replacing $n-k$ for k, yields

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{n-k=0}^{n-k=n} \binom{n}{n-k}^2 \binom{2n-n+k}{n}^2 u_{n,k} \\ &= \sum_{k=n}^{k=0} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 u_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 u_{n,k} \end{aligned} \tag{3.17}$$

This completes the deduction we have proposed to. □

4. Sucessões

4.1. **Sucessão de Fibonacci.** No blogue **Matemática** de Rodrigo Gonçalez apareceu recentemente (2-12-2007) um excelente artigo intitulado "Natureza Elegante - os Números de Fibonacci".

Lembrei-me que é possível determinar a fórmula explícita do termo geral desta sucessão, a partir da relação de recorrência que habitualmente a define:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad \text{com as condições iniciais } x_1 = x_2 = 1. \tag{4.1}$$

A fórmula é

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, \tag{4.2}$$

em que a e b são as raizes da equação

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{4.3}$$

O enunciado é parte do exercício 1.5 do livro de Tom Apostol [9,p.25], cuja resolução é deixada ao leitor. Apresento a minha. Seja

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

e

$$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-1}$$

em que Φ é o número de ouro.

A recorrência é equivalente a

$$x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0. \tag{4.4}$$

Trata-se de uma equação às diferenças linear, homogénea e de 2^a ordem. Pela teoria geral destas equações a sua solução, x_n, é uma combinação linear das soluções fundamentais X_1^n e X_2^n

$$x_n = AX_1^n + BX_2^n, \tag{4.5}$$

em que X_1 e X_2 são as raizes da equação característica

$$X^2 - X - 1 = 0 \tag{4.6}$$

e A, B são constantes (independentes de n).

Esta última equação tem as duas soluções

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = a \\ X_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-1} = b \end{aligned}$$

e, portanto

$$x_n = AX_1^n + BX_2^n = Aa^n + Bb^n$$

Ora, das condições iniciais

$$x_1 = x_2 = 1$$

resulta

$$\begin{aligned} A\Phi - B\Phi^{-1} &= 1 \\ A\Phi^2 + B\Phi^{-2} &= 1; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\Phi^{-1} \\ 1 & \Phi^{-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi & -\Phi^{-1} \\ \Phi^2 & \Phi^{-2} \end{vmatrix}} = \frac{\Phi^{-2}+\Phi^{-1}}{\Phi^{-1}+\Phi} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} \Phi & 1 \\ \Phi^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi & -\Phi^{-1} \\ \Phi^2 & \Phi^{-2} \end{vmatrix}} = \frac{\Phi-\Phi^2}{\Phi^{-1}+\Phi} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} x_n &= AX_1^n + BX_2^n = Aa^n + Bb^n \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}a^n - \frac{\sqrt{5}}{5}b^n \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(a^n - b^n\right); \end{aligned}$$

Mas, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}-\left(1-\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \tag{4.7}$$

como queríamos mostrar. ■

4.2. **Múltiplos e quadrados perfeitos (das XXV OPM).** Este problema foi retirado das Olimpíadas de Matemática de 2006 (categoria B 10^o-12^o): 4^o problema da 1^a eliminatória das XXV Olímpíadas de Matematica:

(http://www.mat.uc.pt/opm/OPM/XXV/XXV_1b.pdf)

Escreve-se por ordem crescente cada um dos múltiplos de 3 cuja soma com 1 é um quadrado perfeito

$$3, 15, 24, 48, \ldots$$

Qual é o 2006.^{o} múltiplo que se escreve?

Resolução

Apresento a minha resolução a seguir, que o leitor pode comparar com outras duas propostas de resolução mais elegantes (da SPM)

(http://www.mat.uc.pt/opm/OPM/XXV/XXV_1bs.pdf)

Os primeiros quadrados perfeitos a seguir ao 2 são:

$$4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \ldots, (n+1)^2 \ldots$$

dos quais se obtêm, por subtracção de 1 a cada

$$\begin{aligned} u_1 &= 3, u_2 = 9, u_3 = 15, u_4 = 24, u_5 = 35, \\ u_6 &= 48, u_7 = 63, u_8 = 80, u_9 = 99, u_{10} = 120, \\ u_{11} &= 143, u_{12} = 168, u_{13} = 195, u_{14} = 224, \ldots, u_n = (n+1)^2 - 1, \ldots \end{aligned}$$

Destes, como $u_2 = 9, u_5 = 35, u_8 = 80, u_{11} = 143, u_{14} = 224$ não são múltiplos de 3, ficam

$$\begin{aligned} u_1 &= 3, \\ u_3 &= 15, u_4 = 24, \\ u_6 &= 48, u_7 = 63, \\ u_9 &= 99, u_{10} = 120, \\ u_{12} &= 168, u_{13} = 195, \ldots \end{aligned}$$

Confirmemos: para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$u_{3n-4} = (3n-4+1)^2 - 1 = (3n-3)^2 - 1 = 9n^2 - 18n + 8 = 3\left(3n^2 - 6n + 2\right) + 2$$

não são múltiplos de 3. Por outro lado, para $n = 3, 4, 5, \ldots$

$$\begin{aligned} u_{3n-5} &= (3n-5+1)^2 - 1 = (3n-4)^2 - 1 = 3\left(3n^2 - 8n + 5\right) \\ u_{3n-6} &= (3n-6+1)^2 - 1 = (3n-5)^2 - 1 = 3\left(3n^2 - 10n + 8\right) \end{aligned}$$

são claramente múltiplos de 3.

Assim, em cada três termos sucessivos u_n (com $n \geq 3$), os primeiros dois são múltiplos de 3 e o terceiro não o é.

Se renumerarmos os índices e chamarmos à nova sucessão v_n , temos

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2^2 - 1 = 3, \\
v_2 &= 4^2 - 1 = 15, \\
v_3 &= 5^2 - 1 = 24, \\
v_4 &= 7^2 - 1 = 48, \\
v_5 &= 8^2 - 1 = 63, \\
v_6 &= 10^2 - 1 = 99, \\
v_7 &= 11^2 - 1 = 120, \\
v_8 &= 13^2 - 1 = 168, \\
v_9 &= 14^2 - 1 = 195, \ldots
\end{aligned}$$

e o que se pede é v_{2006} .

Como o número de inteiros cujos quadrados menos um dividem três é igual a:

1. 1 no grupo de números 2 a 3 inclusive;
2. 2 em cada grupo de 3 números a seguir ao 3, ou seja, de 4 a 6, de 7 a 9, etc.
3. 1999 de 2 a 3000, em virtude de

$$\frac{3000}{3} = 1000 = 1 + 999$$

e

$$1 \times 1 + 999 \times 2 = 1999,$$

então

$$v_{1999} = 2999^2 - 1 = 8994\,000,$$

e não $3000^2 - 1 = 8999\,999$, que não é múltiplo de 3.

Pelo mesmo raciocínio, entre 2 e 3009 há 2005 inteiros cujos quadrados menos um são múltiplos de três, e o último é o que corresponde a 3008 e não a 3009 ($3009^2 - 1$ não é múltiplo de 3):

$$\frac{3009}{3} = 1003 = 1 + 1002$$

e

$$1 \times 1 + 1002 \times 2 = 2005;$$

então

$$v_{2005} = 3008^2 - 1 = 9048\,063.$$

O termo seguinte é o resultado procurado

$$v_{2006} = 3010^2 - 1 = 9060\,099.$$

Este processo pode visualizar-se nas tabelas seguintes

	4	7	10	13	16	19	22	25	28
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
(3)	(6)	(9)	(12)	(15)	(18)	(21)	(24)	(27)	(30)
	2	4	6	8	10	12	14	14	18
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

$$\vdots$$

2998	**3001**	3004	3007	**3010**	3013	3016	3019	3022	3025
2999	3002	3005	**3008**	3011	3014	3017	3020	3023	3026
(3000)	(3003)	(3006)	(3009)	(3012)	(3015)	(3018)	(3021)	(3024)	(3027)
1998	**2000**	2002	2004	**2006**	2008	2010	2012	2014	2016
1999	2001	2003	**2005**	2007	2009	2011	2013	2015	2017
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

4.3. **Limite da raiz de índice n do termo geral de uma sucessão.** Se o termo geral de uma sucessão for constante ($u_n = c$), a sucessão tende para para essa constante, como muito bem se sabe. Neste caso a razão $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{c}{c} = 1$. E qual é o limite de $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{c}$ quando $c > 0$? É bem conhecido (por exemplo [12,13]) que é também 1:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c}{c} = \lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{c} = 1.$$

Considere agora o leitor que $u_n = c^n$, com $c > 0$. Como $\sqrt[n]{c^n} = c$ claro que $\lim \sqrt[n]{u_n} = c$. Por outro lado, sendo neste caso $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{c^{n+1}}{c^n} = c$, verifica-se igualmente a igualdade

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n}.$$

Exemplo: em mais um caso concreto, seja agora $u_n = n^2$. Vou determinar $\lim \sqrt[n]{n^2}$ por um método adaptado de *Curso de Matemáticas Gerais* de Campos Ferreira [12]. Temos $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$.Então, qualquer que seja $\delta > 0$ existe um N tal que, para todo o $n \geq N$, se verifica $1-\delta<\dfrac{(n+1)^2}{n^2}<1+\delta$ e, portanto,

$$1-\delta<\frac{(N+k+1)^2}{(N+k)^2}<1+\delta \qquad k=0,1,2,\ldots n-N-1.$$

Multiplicando estas $n-N$ duplas desigualdades vem, sucessivamente

$$\prod_{k=0}^{n-N-1}(1-\delta)<\prod_{k=0}^{n-N-1}\frac{(N+k+1)^2}{(N+k)^2}<\prod_{k=0}^{n-N-1}(1+\delta)$$

$$\overbrace{(1-\delta)\cdots(1-\delta)}^{n-N}<\frac{(N+1)^2}{N^2}\frac{(N+2)^2}{(N+1)^2}\cdots\frac{n^2}{(n-1)^2}<\overbrace{(1+\delta)\cdots(1+\delta)}^{n-N}$$

$$(1-\delta)^n(1-\delta)^{-N}=(1-\delta)^{n-N}<\frac{n^2}{N^2}<(1+\delta)^{n-N}=(1+\delta)^n(1+\delta)^{-N},$$

pelo que

$$(1-\delta)^n(1-\delta)^{-N}n^2<n^2<(1+\delta)^n(1+\delta)^{-N}n^2$$

e, extraindo agora a raiz de ordem n

$$(1-\delta)\sqrt[n]{(1-\delta)^{-N}N^2}<\sqrt[n]{n^2}<(1+\delta)\sqrt[n]{(1+\delta)^{-N}N^2}.$$

Como $(1-\delta)^{-N}N^2$ e $(1+\delta)^{-N}N^2$ são independentes de n, quando se faz tender n para infinito, $\sqrt[n]{(1-\delta)^{-N}N^2}\to 1$ e $\sqrt[n]{(1+\delta)^{-N}N^2}\to 1$, ou seja, para n suficientemente grande, isto é, a partir de uma dada ordem N'

$$\begin{aligned}1-\delta &< \sqrt[n]{(1-\delta)^{-N}N^2}<1+\delta\\ 1-\delta &< \sqrt[n]{(1+\delta)^{-N}N^2}<1+\delta.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}(1-\delta)(1-\delta) &< (1-\delta)\sqrt[n]{(1-\delta)^{-N}N^2}<\sqrt[n]{n^2}\\ \sqrt[n]{n^2} &< (1+\delta)\sqrt[n]{(1+\delta)^{-N}N^2}<(1+\delta)(1+\delta).\end{aligned}$$

Atendendo a que $(1-\delta)(1-\delta)=1-\left(\delta+\delta-\delta^2\right)$ e $(1+\delta)(1+\delta)=1+\left(\delta+b\delta+\delta^2\right)$ e também $\delta+\delta+\delta^2>\delta+\delta-\delta^2$, se se escolher um número $\varepsilon>\delta+\delta+\delta^2>\delta+\delta-\delta^2$ tem-se $1-\varepsilon<\sqrt[n]{n^2}<1+\varepsilon$ (para $n\geq\max\{N',N\}$), e, portanto, continua a ser

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\sqrt[n]{u_n}=1. \qquad \blacktriangleleft$$

E será que em geral o limite da razão de um termo da sucessão (u_n) em relação ao anterior é igual ao limite da raiz de índice n de u_n? A resposta é afirmativa e uma possível demonstração é a de Carlos Sarrico, em *Análise Matemática* [13], que prova primeiro que se uma sucessão converge para b, então as médias aritmética e geométrica dos seus n primeiros termos convergem também para b, e daí deduz a validade desse enunciado. A proposição seguinte trata precisamente do caso geral, seguindo a mesma estrutura de demonstração do exemplo anterior.

Proposição: *Se, para todos os valores de* n, $u_n > 0$ e se $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = b$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = b$.

Demonstração (adaptada de [12]): Pretende-se provar que, qualquer que seja $\varepsilon < 0$, a desigualdade

$$|\sqrt[n]{u_n} - b| < \varepsilon$$

é verificada para todos os valores de n, a partir de alguma ordem M. Como, por hipótese, $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = b$, então, qualquer que seja $\delta > 0$ existe um N tal que, para todo o $n \geq N$, se verifica $b - \delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} < b + \delta$ e, portanto, para $k = 0, 1, 2, \ldots n - N - 1$, tem-se

$$b - \delta < \frac{u_{N+k+1}}{u_{N+k}} < b + \delta.$$

Multiplicando em k estas $n - N$ duplas desigualdades vem, sucessivamente

$$\prod_{k=0}^{n-N-1} (b - \delta) < \prod_{k=0}^{n-N-1} \frac{u_{N+k+1}}{u_{N+k}} < \prod_{k=0}^{n-N-1} (b + \delta)$$

$$\overbrace{(b - \delta) \cdots (b - \delta)}^{n-N} < \frac{u_{N+1}}{u_N} \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} < \overbrace{(b + \delta) \cdots (b + \delta)}^{n-N}$$

$$(b - \delta)^n (b - \delta)^{-N} = (b - \delta)^{n-N} < \frac{u_n}{u_N} < (b + \delta)^{n-N} = (b + \delta)^n (b + \delta)^{-N}.$$

Daqui tira-se

$$(b - \delta)^n (b - \delta)^{-N} u_N < u_n < (b + \delta)^n (b + \delta)^{-N} u_N$$

e, extraindo a raiz de ordem n

$$(b - \delta) \sqrt[n]{(b - \delta)^{-N} u_N} < \sqrt[n]{u_n} < (b + \delta) \sqrt[n]{(b + \delta)^{-N} u_N}.$$

Como $(b - \delta)^{-N} u_N$ e $(b + \delta)^{-N} u_N$ são independentes de n, quando se faz tender n para infinito, $\sqrt[n]{(b - \delta)^{-N} u_N}$ e $\sqrt[n]{(b + \delta)^{-N} u_N}$ tendem para 1, ou seja, existe um número N', tal que para $n \geq N'$

$$\begin{aligned} 1 - \delta &< \sqrt[n]{(b - \delta)^{-N} u_N} < 1 + \delta \\ 1 - \delta &< \sqrt[n]{(b + \delta)^{-N} u_N} < 1 + \delta \end{aligned}$$

pelo que se obtém o seguinte enquadramento:

$$\begin{aligned}(1-\delta)(b-\delta) &< (b-\delta)\sqrt[n]{(b-\delta)^{-N}u_N} < \sqrt[n]{u_n}\\ \sqrt[n]{u_n} &< (b+\delta)\sqrt[n]{(b+\delta)^{-N}u_N} < (b+\delta)(1+\delta).\end{aligned}$$

Atendendo a que $(1-\delta)(b-\delta) = b - \left(\delta + b\delta - \delta^2\right)$ e $(b+\delta)(1+\delta) = b + \left(\delta + b\delta + \delta^2\right)$ e também $\delta + b\delta + \delta^2 > \delta + b\delta - \delta^2$, vê-se que tomando $\varepsilon > \delta + b\delta + \delta^2$ se tem efectivamente $b - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < b + \varepsilon$ (para $n \geq M = \max\{N', N\}$), o que demonstra a proposição. ■

Exercícios de aplicação: determine $\lim \sqrt[n]{u_n}$, em que

(1) $u_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}}$

(2) $u_n = \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$

(3) $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ em que $0 < a \leq b$.

Resolução

(1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} \to 1$; e $\sqrt[n]{u_n} \to 1$

(2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!} = \dfrac{(n+2)(n+1) - (n+1)}{(n+1) - 1} \to +\infty$;
e $\sqrt[n]{u_n} \to +\infty$

(3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \dfrac{b^{n+1}\left(\dfrac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + 1\right)}{b^n\left(\dfrac{a^n}{b^n} + 1\right)} \to b$; e $\sqrt[n]{u_n} \to b$.

Problema: *Sabendo que a sucessão* (u_n) *verifica a relação de recorrência*

$$u_n - 34u_{n-1} + u_{n-2} = 0.$$

determine $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Resolução

A relação de recorrência acima é de segunda ordem, linear e de coeficientes constantes, dizendo-se ainda homogénea pelo segundo membro ser nulo. A teoria das equações às diferenças diz-nos que o termo geral da sucessão (u_n) é da forma

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

em que α, β são as raizes da equação característica

$$X^2 - 34X + 1 = 0.$$

Verificação: por substituição vê-se que $u_n = \alpha^n$ é solução de $u_n - 34u_{n-1} + u_{n-2} = 0$. De facto,

$$\alpha^n - 34\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$$

é equivalente a $\alpha^{n-2}\left(\alpha^2 - 34\alpha + 1\right) = 0$. Analogamente $u_n = \beta^n$ é outra solução, pois de

$$\beta^n - 34\beta^{n-1} + \beta^{n-2} = 0$$

resulta $\beta^{n-2}\left(\beta^2 - 34\beta + 1\right) = 0$. Sendo α, β raizes da equação característica, a relação de recorrência é verificada. Como a expressão $A\alpha^n + B\beta^n$ é uma combinação linear de α^n e β^n, facilmente se conclui que também verifica a recorrência $u_n - 34u_{n-1} + u_{n-2} = 0$.

Resolvendo a equação característica, vem

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{34 + \sqrt{34^2 - 4}}{2} = 17 + 12\sqrt{2} > 1\\ \beta &= \frac{34 - \sqrt{34^2 - 4}}{2} = 17 - 12\sqrt{2} = \alpha^{-1} < 1\end{aligned}$$

e o termo geral

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n = A\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^n + B\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^n.$$

Como $\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^n \to 0$, o comportamento de u_n para n suficientemente grande é dominado por $\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^n$– caso a solução seja crescente com n – e a razão

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^{n+1} + B\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^{n+1}}{A\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^n + B\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^n}$$

tende por esse motivo para $17 + 12\sqrt{2}$. ◀

5. Noções básicas sobre Séries

Uma série de números reais é uma soma do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.1}$$

A sucessão das somas parciais associada a esta série é a sucessão formada pelos números

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots, \tag{5.2}$$

em que

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i. \tag{5.3}$$

A série diz-se *convergente* se existe e é finito $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i$. A este limite chama-se a soma da série. Se o limite não existir ou for infinito, a série é *divergente*.

Exemplo 5.1. *Determine a soma da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}.$$

▶ A sucessão das somas parciais (s_n) é a sucessão de termo geral

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}.$$

Esta soma é, como bem sabemos, a da progressão geométrica cujo 1^o termo é $s_1 = 2$ e a razão é $1/2$. Vejamos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}s_n &= s_n - \frac{1}{2}s_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} - \sum_{i=1}^{n} 2^{-(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} - \sum_{i=2}^{n+1} 2^{-i} \\
&= 2^{-1} + \sum_{i=2}^{n} 2^{-i} - \sum_{i=2}^{n} 2^{-i} - 2^{-(n+1)} \\
&= 2^{-1}\left(1 - 2^{-n}\right);
\end{aligned}$$

donde

$$s_n = 1 - 2^{-n}$$

e, portanto, como

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \qquad ◀$$

Para o caso geral de uma *série geométrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_1 r^{n-1}$$

vem, à semelhança do exemplo,

$$\begin{aligned}
(1-r)\, s_n &= s_n - r s_n = \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} - r\sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} - \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i} = \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} - \sum_{i=2}^{n+1} u_1 r^{i-1} \\
&= u_1 + \sum_{i=2}^{n} u_1 r^{i-1} - \sum_{i=2}^{n} u_1 r^{i-1} - u_1 r^{n} \\
&= u_1\left(1 - r^{n}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = u_1 \frac{1-r^n}{1-r} \qquad r \neq 1.$$

Ora, se $|r| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} u_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{u_1}{1-r},$$

a série geométrica é convergente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_1 r^{n-1} = \frac{u_1}{1-r} \qquad \text{(desde que } r < 1\text{)}. \tag{5.4}$$

Se $r \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ não é finito e, por isso, a série é divergente.

Uma sucessão é convergente se e só se for uma sucessão de Cauchy, isto é, se dado um qualquer $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que, para todos os inteiros positivos que verifiquem $n > m \geq N$, $|u_m - u_n| < \varepsilon$. Daqui se conclui o seguinte critério de convergência:

Teorema 5.1. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente se e só se, dado um qualquer $\varepsilon > 0$, existir um inteiro positivo N tal que, para todos os inteiros $n > m \geq N$, $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon$.*

Demonstração. Como a diferença das somas parciais é $s_m - s_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n$, o módulo da diferença destas mesmas somas é, pois, $|s_m - s_n| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n|$, e aplicando o critério de Cauchy a estas somas parciais, vemos que para todo o $\varepsilon > 0$, há-de existir um inteiro positivo N tal que, para todos os inteiros $n > m \geq N$, $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon$, se e só se, a série for convergente.

Em símbolos, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente, se e só se,

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>m\geq N}{\forall} \quad |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon,$$

outra forma de traduzir o enunciado. □

Corolário 5.1. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente, a sucessão (u_n) tende para 0.*

Demonstração. Se $n = m + 1$,

$$|u_n| < \varepsilon.$$

Assim, verifica-se

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>m\geq N}{\forall} \quad |u_n| < \varepsilon$$

que é a definição de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. □

A *série harmónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ não verifica este critério de convergência porque, de

$$\left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right| \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = (n-m)\frac{1}{n}.$$

vemos que se escolhermos $n = 2m$, temos

$$\left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right| \geq (2m - m)\,\frac{1}{2m} = \frac{1}{2},$$

o que contraria a condição necessária para que uma série seja convergente expressa neste teorema. Assim, *a série harmónica é divergente.*

5.1. **Números racionais: exercício sobre dízimas periódicas e série geométrica.** Prove que qualquer número representado por uma dízima periódica é racional.

Se considerar, como **exemplo**, o número $0,\overline{150}$, em que a barra, nesta notação, significa que o grupo de 3 dígitos 150 se repete indefinidamente

$$0,\overline{150} = 0,150\,150\,150\,\ldots$$

posso escrevê-lo na forma

$$0,\overline{150} = \frac{150}{10^3} + \frac{150}{10^6} + \frac{150}{10^9} + \cdots$$

e calcular agora a soma da progessão geométrica de razão 10^{-3} e primeiro termo $0,150$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{150}{10^{3n}} = \frac{0,150}{1 - 10^{-3}} = \frac{150}{10^3 - 1} = \frac{50}{333}$$

No segundo **exemplo** tomo o número $0,3\overline{150}$ como ilustrativo do caso em que a dízima não começa imediatamente a seguir à vírgula. Assim, usando o resultado anterior

$$0,3\overline{150} = 0,3 + 0,1 \times 0,\overline{150} = 0,3 + 0,1 \times \frac{50}{333} = \frac{1049}{3330}$$

No último **exemplo**, considero $-2,3\overline{150}$. Será

$$-2,3\overline{150} = -\left(2,3\overline{150}\right) = -\left(2 + 0,3\overline{150}\right) = -\left(2 + \frac{1049}{3330}\right) = -\frac{7709}{3330}.$$

O **caso geral** é simplesmente o de uma dízima periódica com p dígitos, bastando como se vê mostrar a propriedade para os números do tipo $0,\overline{a_{p-1}a_{p-2}...a_1a_0}$, porque os outros são uma consequência imediata.

O número cujos dígitos são os que estão sob a barra tem o valor decimal

$$N = 10^0 a_0 + 10^1 a_1 + \cdots + 10^{p-1} a_{p-1}$$

Sendo assim, usando o mesmo raciocínio do primeiro exemplo, tem-se

$$0,\overline{a_{p-1}a_{p-2}...a_1a_0} = \frac{N}{10^p} + \frac{N}{10^{2p}} + \cdots = \frac{N/10^p}{1 - 10^{-p}} = \frac{N}{10^p - 1}.$$

Exemplo de aplicação: $x = 0,151515...$ $y = 1,2151515...$

Para $x = 0,\overline{15}$, $N = 10^0 \times 5 + 10^1 \times 1 = 15$, $x = \dfrac{15}{10^2 - 1} = \dfrac{15}{99}$. De x deduz-se y

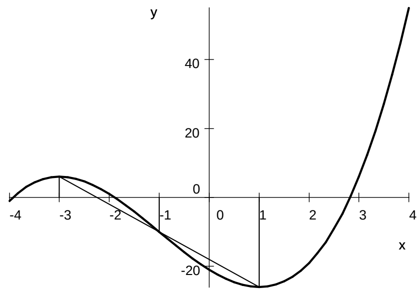
$$y = 1,2\overline{15} = 1 + 0,2 + 0,1x = \frac{12}{10} + \frac{1}{10}\frac{15}{99} = \frac{401}{330}.$$

Exercício: determine o número racional representado na forma decimal por $0,3311111...$

Resposta: $\dfrac{149}{450}$

6. Maximização / Minimização

6.1. **Função cúbica.** Mostre que o ponto de inflexão da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 21$, cujo gráfico se representa a seguir, está situado a meio dos de estacionaridade.



(enunciado *adaptado e simplificado* da entrada do 'Mathematics weblog', Steve, *cubics*, *harder question* 2, 26-1-2006).

Resolução

Começamos por calcular os pontos de estacionaridade. Como

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

então

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
&\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) - 21 = 6 \\ f(1) &= (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) - 21 = -26 \end{aligned}$$

Logo, os pontos estacionários são $(-3, 6), (1, -26)$.

Agora determinamos o ponto de inflexão. Dado que

$$f''(x) = 6x + 6$$

tem-se

$$\begin{aligned} f''(-3) &= -18 + 6 = -12 \\ f''(1) &= 6 + 6 = 12 \end{aligned}$$

pelo que, porque

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ f''(x) &> 0 \Leftrightarrow 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \\ f''(x) &< 0 \Leftrightarrow 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{aligned}$$

o pontos de inflexão é o ponto de coordenadas $(-1, f(-1)) = (-1, -10)$:

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) - 21 = -10$$

Logo

$$-1 = \frac{-3+1}{2} \wedge -10 = \frac{6-26}{2}$$

e, por conseguinte

$$(-1, -10) = \frac{1}{2}((-3, 6) + (1, -26)) \qquad \blacksquare$$

6.2. **Optimização por método generalizando o de Lagrange.** Considere o seguinte problema de optimização: usando as condições suficientes de optimalidade encontre o par (x^*, y^*) onde a função g

$$g(x, y) = (x + 2)(y + 1)$$

sujeita à restrição

$$4x + 6y = 130$$

tem um máximo.

[*Adaptado de um problema do exame de 28 de Janeiro de 2006 de Métodos Numéricos I, do Curso de Informática de Gestão da Universidade do Minho.*([7])]

Resolução

O problema de optimização corresponde a determinar o mínimo da função $f = -g$

$$f(x, y) = -(x + 2)(y + 1)$$

sujeita à restrição

$$c(x,y)=0$$

em que $c(x,y)=4x+6y-130$.

Nota teórica:

Se (x^*,y^*) satisfizer as duas condições seguintes é um mínimo:

(i) o par (x^*,y^*) verifica simultaneamente as n equações

$$\nabla f(x^*,y^*)-\nabla c(x^*,y^*)\lambda^*=0$$

e as m equações

$$c(x^*,y^*)=0$$

(ii) Se para todo o s tal que $(\nabla c)^T s=0$ (com $s\neq 0$),

$$s^T\nabla_{xx}^2 L(x^*,\lambda^*)s>0,$$

em que

$$\nabla_{xx}^2 L(x,y)=\nabla^2 f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla^2 c_i(x).$$

A função Lagrangeana $L(x,y)$ é a função

$$L(x,\lambda)=f(x)-c(x)^T\lambda=f(x)-\sum_{i=1}^{m}c_i(x)\lambda_i$$

e as matrizes $c(x)$ e λ,respectivamente

$$c(x)=\begin{pmatrix}c_1(x)\\ \vdots\\ c_m(x)\end{pmatrix}$$

e

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}$$

Vamos ver: tem-se

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y-1\\ -x-2\end{pmatrix}\qquad \nabla c=\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial c}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}\qquad \lambda=(\lambda)$$

A condição (i) é equivalente ao sistema

$$-y-1-4\lambda=0$$

$$-x-2-6\lambda=0$$

$$4x+6y=130$$

A matriz ampliada deste sistema, após troca de linhas, vem

$$\begin{pmatrix}4&6&0&|&130\\ -1&0&-6&|&2\\ 0&-1&-4&|&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&6&0&|&130\\ 0&6/4&-6&|&138/4\\ 0&-1&-4&|&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&6&0&|&130\\ 0&3/2&-6&|&69/2\\ 0&0&-8&|&24\end{pmatrix}$$

cuja solução é

$$x = \frac{130 - 66}{4} = 16$$
$$y = \left(\frac{69}{2} - 18\right) \times \frac{2}{3} = 11$$
$$\lambda = -3$$

Por conseguinte, $(x^*, y^*) = (16, 11)$ satisfaz (i). Quanto a (ii), tem-se

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2 c = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} & \frac{\partial c}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\nabla^2_{xx} L\left(x, y\right) = \nabla^2 f\left(x\right) - \lambda \nabla^2 c = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$\left(\nabla c\right)^T s = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4s_1 + 6s_2 = 0 \Leftrightarrow s_2 = -\frac{2}{3}s_1$$

e

$$s^T \nabla^2_{xx} L\left(x^*, \lambda^*\right) s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_2 & -s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$
$$s^T \nabla^2_{xx} L\left(x^*, \lambda^*\right) s = -2s_1 s_2 = -2s_1 \left(-\frac{2}{3}s_1\right) = \frac{4}{3}s_1^2$$

é claro que, se $s \neq 0$, $s^T \nabla^2_{xx} L\left(x^*, \lambda^*\right) s > 0$ e a condição (ii) é também verificada. Assim, $(x^*, y^*) = (16, 11)$ é mínimo de $f\left(x, y\right)$.

7. Integrais paramétricos

7.1. **Regra de Leibniz de diferenciação de um integral paramétrico e sua generalização.** Suponhamos que temos o integral que é função do parâmetro t

$$I(t) = \int_a^b f\left(x, t\right) dx$$

A sua diferenciação baseia-se na seguinte

Proposição (regra de Leibniz): *Sejam $f\left(x, t\right)$ uma função real definida num rectângulo $R = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ integrável em x para cada valor real de t e $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ a sua derivada parcial contínua em x e t no mesmo rectângulo. A derivada do integral função do parâmetro t*

$$I(t) = \int_a^b f\left(x, t\right) dx$$

é dada por

$$I'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx.$$

Neste caso os limites de integração são constantes. A generalização a um integral do tipo

$$I(t) = J(u,v,t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,dx,$$

em que o parâmetro ocorre também nas funções $u(t)$ e $v(t)$ dos limites de integração, é uma consequência do teorema fundamental do cálculo integral para uma função, na sua forma habitual

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x)$$

e nesta dela derivada

$$\frac{d}{dx}\int_x^b g(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_b^x g(t)\,dt = -g(x)$$

bem como da regra de derivação da função composta. A derivada passa a ser

$$I'(t) = \frac{dI}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial J}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial J}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

ou

$$\begin{aligned} I'(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_u^v f(x,t)\,dx\right)\frac{dt}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x,t)\,dx\right)\frac{dv(t)}{dt} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(x,t)\,dx\right)\frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$

Assim

$$I'(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + f(v(t),t)\,v'(t) - f(u(t),t)\,u'(t)$$

Problema: determine a derivada $I'(t)$ do integral

$$I(t) = J(2t,t^2,t) = \int_{2t}^{t^2} e^{tx} dx$$

Resolução: neste caso $f(x,t) = e^{tx}, u(t) = 2t$ e$v(t) = t^2$. As derivadas são

$$v'(t) = 2t \qquad\qquad u'(t) = 2$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}e^{tx} = xe^{tx}$$

e os valores da função integranda são calculados em (v,t) e (u,t)

$$\begin{aligned} f\left(v\left(t\right),t\right) &= e^{t\cdot t^2}=e^{t^3} \\ f\left(u\left(t\right),t\right) &= e^{t\cdot 2t}=e^{2t^2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t}dx+f\left(v\left(t\right),t\right)v'\left(t\right)-f\left(u\left(t\right),t\right)u'\left(t\right) \\ &= \int_{2t}^{t^2} xe^{tx}dx+2te^{t^3}-2e^{2t^2} \\ &= \frac{e^{t^3}\left(3t^3-1\right)-e^{2t^2}\left(4t^2-1\right)}{t^2} \qquad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

7.2. **Integração pelo método de diferenciação em relação a um parâmetro.** Na entrada do *Cálculo automático de um integral difícil que me resistiu aos métodos matemáticos usuais* referi o método da diferenciação sob o sinal de integral exposto no post de Todd and Vishal's blog nela indicado. Este método é também conhecido pelo nome acima. Em que consiste? Generaliza-se o integral que se pretende calcular usando um parâmetro, sendo o integral original obtido para um valor particular desse parâmetro.

No caso do integral aí calculado

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}dx$$

a generalização através do parâmetro t que é aconselhada no post [`http://topologicalmusings.wordpress.com/2008/10/12/solution-to-pow-10-another-hard-integral/`] de Todd and Vishal's blog (e na Wikipedia [`http://en.wikipedia.org/wiki/Differentiation_under_the_integral_sign#Other_problems`] e em Integration: The Feynman Way [`http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-304Spring-2006/80FAFE90-0273-499D-B3D6-EDECAFE3968D/0/integratnfeynman.pdf`]) é:

$$I(t)=\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan\left(t\tan x\right)}{\tan x}dx$$

da qual o integral original é

$$I(1)=\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}dx$$

Para aplicar este método é necessário que a função integranda e a sua derivada parcial em relação ao parâmetro sejam contínuas no intervalo de integração, quer no que diz respeito à variável de integração x quer ao parâmetro t ; neste caso são-no:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\arctan\left(t\tan x\right)}{\tan x}=\frac{1}{t^2\tan^2 x+1}.$$

Depois de se ter diferenciado sob o sinal de integral, obtém-se a derivada do integral em relação ao parâmetro, calculando o integral da nova função integranda, a que se acabou de determinar:

$$\frac{d}{dt}I(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\arctan\left(t\tan x\right)}{\tan x}dt$$

O objectivo é tentar obter um integral simples! Continuando, vem

$$\frac{d}{dt}I(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t^2\tan^2 x+1}dx$$

Fazendo a substituição recomendada por *Todd Trimble* $x=\arctan u$ transforma-se este integral noutro

$$\frac{d}{dt}I(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t^2\tan^2 x+1}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2u^2+1}\frac{1}{u^2+1}du$$

que é integrável pelo método das fracções parciais:

$$\frac{1}{t^2u^2+1}\frac{1}{u^2+1}=\frac{t}{t^2-1}\frac{t}{t^2u^2+1}-\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{u^2+1}.$$

obtendo-se

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2u^2+1}\frac{1}{u^2+1}du &= \frac{t}{t^2-1}\int_0^{\infty}\frac{t}{t^2u^2+1}du-\frac{1}{t^2-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du\\ &= \frac{t}{t^2-1}\arctan\left(tu\right)\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{t^2-1}\arctan\left(u\right)\Big|_0^{\infty}\\ &= \frac{t}{t^2-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{1}{t+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Por fim, integra-se em relação ao parâmetro t

$$I(t)=\int\frac{\pi}{2\left(t+1\right)}=\frac{\pi}{2}\ln\left(t+1\right)+C$$

e calcula-se a constante de integração através de outro valor particular do integral; como

$$I(0)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan\left(0\tan x\right)}{\tan x}dx=0$$

tem-se

$$\frac{\pi}{2}\ln\left(1\right)+C=0$$

donde $C=0$ e o integral paramétrico é

$$I(t)=\int \frac{\pi}{2(t+1)}dt=\frac{\pi}{2}\ln(t+1)$$

pelo que o integral original é igual a

$$I(1)=\frac{\pi}{2}\ln(1+1)=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

8. Variável complexa

8.1. **Identidade Complexa útil.** Dados dois números complexos z e w verifica-se

$$|z-w|^2=(z-w)\overline{(z-w)}=|z|^2+|w|^2-z\overline{w}-\overline{z}w$$

Justifique esta dupla identidade.

Demonstração: A primeira igualdade pode justificar-se considerando z e w da forma $z=x+iy$ e $w=u+iv$, donde $z-w=x-u-i(y-v)$, pelo que

$$\overline{z-w}=\overline{[x-u-i(y-v)]}=x-u+i(y-v).$$

E como $|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$, então

$$\begin{aligned}(z-w)\overline{(z-w)} &= [x-u-i(y-v)][x-u+i(y-v)]\\ &= (x-u)^2+(y-v)^2=|z-w|^2.\end{aligned}$$

Quanto à segunda igualdade, deduz-se sucessivamente das propriedades elementares dos número complexos

$$\begin{aligned}(z-w)\overline{(z-w)} &= (z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}=\\ & |z|^2+z\overline{w}-w\overline{z}+|w|^2. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

8.2. **Duas equações equivalentes da circunferência no plano complexo.** No final deverá ficar claro que o conjunto

$$\{z\in\mathbb{C}: z\overline{z}+z(1-i)-(1+i)\overline{z}-2=0\}$$

define no plano complexo uma circunferência de centro $1+i$ e raio igual a 2.

No plano complexo o conjunto $A=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r\}$ representa, como bem se sabe, a circunferência de centro em z_0 e de raio igual a $r\in\mathbb{R}$.

É possível representar a mesma circunferência por outra relação equivalente, que é uma generalização da equivalência entre $|z|=r$ e $z\overline{z}-r^2=0$. Vou mostrá-lo, recorrendo à identidade elementar introduzida anteriormente na sub-secção anterior

$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-z\overline{z}_0-\overline{z}z_0,$$

onde está demonstrada, como resultado directo das propriedades elementares dos números complexos. Por conveniência repito a sua dedução, de forma condensada e com alteração de notação

$$\begin{aligned} |z-z_0|^2 &= (z-z_0)\overline{(z-z_0)} = (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0) \\ &= z\overline{z}+z\overline{z}_0-w\overline{z}+z_0\overline{w} = |z|^2+z\overline{z}_0-z_0\overline{z}+|z_0|^2. \end{aligned}$$

Seja $z=x+iy$ e $z_0=x_0+iy_0$. A equação $|z-z_0|=r$ é equivalente a $|z-z_0|^2=r^2$, ou seja a

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

e

$$|z|^2+z\overline{z}_0-z_0\overline{z}+|z_0|^2-r^2=0$$

que é precisamente a equação dessa tal circunferência.

Assim, o conjunto $B=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|^2+z\overline{z}_0-z_0\overline{z}+|z_0|^2-r^2=0\right\}=A$.

Exemplos: o lugar geométrico dos z tais que

(1) $|z-(2-i)|=1$ é a circunferência de centro em $z_0=x_0+iy_0=2-i$ e raio $r=1$, traduz-se também pela equação

$$|z|^2+(-2+i)\,\overline{z}+(2-i)\,z-4=0$$

isto é

$$\{z\in\mathbb{C}:z\overline{z}+(-2+i)\,\overline{z}+(2-i)\,z-4=0\}=\{z\in\mathbb{C}:|z-(2-i)|=1\}$$

(2) $|z|=r$ é a circunferência de centro em $z_0=x_0+iy_0=0+i0$ e raio r. Neste caso a equação equivalente é

$$z\overline{z}-r^2=0$$

o que é uma consequência imediata de $|z|=r$, dado que $z\overline{z}=|z|^2$. Por este motivo

$$\left\{z\in\mathbb{C}:z\overline{z}-r^2=0\right\}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}$$

que foi a equivalência referida no início.

Claro que em vez de

$$|z|^2+z\overline{z}_0-z_0\overline{z}+|z_0|^2-r^2=0$$

a equação pode assumir uma forma equivalente, multiplicando-a por uma constante real $k\neq 0$:

$$k\,|z|^2+kz\overline{z}_0-kz_0\overline{z}+k\,|z_0|^2-kr^2=0.$$

Exercício: indique o lugar geométrico definido no plano complexo z pela equação

$$3\,|z|^2+3z\,(1-i)-3\,(1+i)\,\overline{z}-6=0$$

Esta equação é equivalente a

$$|z|^2 + z(1-i) - (1+i)\,\overline{z} + 2 - 4 = 0$$

pelo que, comparando coeficientes, $r = 2$, $|z_0| = \sqrt{2}$, $z_0 = 1+i$. Trata-se da circunferência centrada em $1+i$ e de raio igual a 2, de que falei logo no primeiro parágrafo.

8.3. **Uma transformação – inversão complexa – de uma circunferência.** Podemos perguntar: se tivermos, no plano complexo z, um círculo centrado na origem ($z_0 = 0$) de raio igual a r, aplicando a transformação

$$w = \frac{1}{z}$$

o que é que passaremos a ter, no plano complexo w?

A equação do círculo é $|z| \leq r$. A circunferência $|z| = r$ transforma-se em $|w| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{r}$, ou seja, outra circunferência centrada na origem do plano w e de raio $R = \dfrac{1}{r}$. Assim, o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ é transformado no conjunto $B = \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq R\}$, isto é, todo o plano w com exclusão do interior do círculo $|w| < R$.

Admita agora o leitor que tem, no plano z, outra circunferência com o mesmo raio r, mas centrada em $z_0 = x_0 + i0 = r$. Então $|z - z_0| = |z - r| = r$ e a mesma transformação de inversão $w = \dfrac{1}{z}$, traduz-se, no plano w, por

$$\left|\frac{1}{w} - r\right| = r.$$

Resta saber qual é o lugar geométrico

$$C = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left|\frac{1}{w} - r\right| = r \right\}$$

O leitor que assim entenda poderá tentar ver qual é.

Para quem esteja interessado na solução mas tenha alguma dúvida, apresento, de seguida, uma possível resolução.

Resolução

Admita que z percorre a circunferência $|z - r| = r$ no sentido directo, partindo da origem, passa pelos pontos situados no semi-plano $\operatorname{Im} z < 0$, cruza o eixo real em $2r$ e continua pelo semi-plano $\operatorname{Im} z > 0$ até atingir novamente a origem.

Vamos ver que w percorre a recta $w = 1/2r + i0$ no sentido do semi-plano superior para o semi-plano inferior.

Quando $z = x + iy$ descreve $|z - r| = r$, $(x-r)^2 + y^2 = r^2$, donde $x^2 + y^2 = 2rx$. Como

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = u + iv,$$

então

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2r}$$

e

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{2rx} = -\frac{y}{2rx}$$

$$w = \frac{1}{2r} - i\frac{y}{2rx}$$

que é a equação de uma recta situada no plano complexo w com parte real igual a $\dfrac{1}{2r}$. Para $\operatorname{Re} z \times \operatorname{Im} z < 0$, $\dfrac{y}{x} < 0$, donde $v > 0$; se $y = 0$, então $\dfrac{y}{x} = 0$ e para $\operatorname{Re} z \times \operatorname{Im} z > 0$, $\dfrac{y}{x} > 0$, pelo que $v < 0$. Por outro lado $\left|\dfrac{y}{x}\right| \to \infty$ quando x tende para 0. ◄

9. Desigualdades e identidades algébricas clássicas

9.1. **Desigualdade de Cauchy-Schwarz.** A desigualdade de Cauchy-Schwarz corresponde ao seguinte

Teorema: *Para todo o vector* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e todo o vector* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *tem-se:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$$

ou

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Demonstração: Qualquer que seja o real λ, tomo o vector $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$, e vou achar

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Seja qual for o λ, o trinómio do lado direito, em λ, não muda de sinal, é sempre positivo ou igual a zero, porque o número $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda y_k)^2$ é não negativo:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geq 0,$$

o que implica que o seu discriminante seja menor ou igual a zero

$$\Delta = \left(2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) \leq 0,$$

significando que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right).$$

Daqui pode ainda concluir-se que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Se algum dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ for nulo, esta relação é evidentemente verificada. ■

O significado geométrico em $\mathbb{R}^3$ desta desigualdade é o de que o produto interno de dois vectores é menor ou igual ao produto dos módulos (das normas) desses vectores.

9.2. **Identidade de Lagrange.** A desigualdade de Cauchy-Schwarz, já demonstrada anteriormente, é também uma consequência directa da identidade de Lagrange; neste sentido esta identidade constitui uma generalização dessa desigualdade, que relembro ser

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

Proposição: Identidade de Lagrange. Para os reais a_k e b_k (com $1 \leq k \leq n$) verifica-se

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

Demostração: O produto de duas somas com n termos cada é uma soma com n^2 termos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j$$

Os índices i e j de cada termo genérico $x_i y_j$ podem ser iguais $(i = j)$ ou o primeiro menor do que o segundo $(i < j)$ ou maior $(j < i)$.

Separando estes três grupos de parcelas, vem

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j &= \sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_iy_j+\sum_{1\leq j<i\leq n}x_iy_j\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_iy_j+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}x_iy_j\end{aligned}$$

donde

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_iy_i+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}x_iy_i$$

Particularizando, para $x_i=a_i^2$ e $y_j=b_j^2$ obtém-se

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_i^2b_j^2+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}a_i^2b_j^2$$

e para $x_i=y_i=a_ib_i$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_ib_ia_jb_j+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}a_ib_ia_jb_j$$

Ora

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_ib_ia_jb_j=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}a_ib_ia_jb_j$$

pelo que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_ib_ia_jb_j$$

Por outro lado

$$2a_ib_ia_jb_j=a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

donde

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_i^2b_j^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_j^2b_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\end{aligned}$$

visto que, por troca dos índices i e j, se tem

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_j^2b_i^2=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}a_i^2b_j^2.$$

provando-se assim a identidade indicada acima $\square$

10. Fracções contínuas

10.1. Fracções contínuas generalizadas. A expressão

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}}$$

onde a_1, a_2, $\ldots a_n$, $\ldots$, b_1, b_2, $\ldots$, b_n são *números naturais* e b_0, um número natural ou zero, chama-se fracção contínua generalizada. Esta representação com vários "andares" pode ser substituída por outras mais cómodas e compactas:

$$\begin{aligned} b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}} &= b_0 + \mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \\ &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_1}{b_1 +}\cdots\frac{a_n}{b_n +}\cdots \end{aligned}$$

Uma fracção contínua pode ser cortada, mantendo os elementos b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n e pondo de lado os elementos posteriores a_{n+1}, b_{n+1}, a_{n+2}, b_{n+2}, $\ldots$. O número que deste modo se obtém, designa-se n-ésima *fracção reduzida* (ou simplesmente *reduzida*) e representa-se por $\dfrac{p_n}{q_n}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = b_0 + \mathcal{K}_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}\ .$$

No caso particular de $n = 0$, a reduzida de ordem zero $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{b_0}{1}$. Para determinar a n-ésima reduzida, não é necessário escrevê-la sob a forma de "andares" nem efectuar os longos cálculos que resultam directamente dessa fórmula. Existem fórmulas de recorrência bastante simples que permitem calcular p_n e q_n. Evidentemente,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{b_0}{1}; \qquad \frac{p_1}{q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1}.$$

A fim de passar de $\dfrac{p_1}{q_1}$ a $\dfrac{p_2}{q_2}$, deve-se substituir a_1 por $b_1 + \dfrac{a_2}{b_2}$. Depois de algumas transformações simples[1], obteremos

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{b_2\left(b_1 b_0 + a_1\right) + b_0 a_2}{b_2 b_1 + a_2}.$$

Se analisarmos com atenção esta fórmula, verificaremos que a sua estrutura é a seguinte:

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 b_2 + p_0 a_2}{q_1 b_2 + q_0 a_2}.$$

Esta igualdade leva-nos a formular uma regra geral para a n-ésima reduzida. Anotemos esta regra

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} b_n + p_{n-2} a_n}{q_{n-1} b_n + q_{n-2} a_n} \qquad n \geq 2,$$

e exprimamos separadamente o numerador e o denominador da reduzida de ordem n:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_n = p_{n-1} b_n + p_{n-2} a_n, \\ q_n = q_{n-1} b_n + q_{n-2} a_n, \\ n \geq 2; \end{array} \right. \tag{10.1}$$

sendo as condições iniciais

$$p_0 = b_0, \qquad q_0 = 1, \qquad p_1 = b_1 b_0 + a_1, \qquad q_1 = b_1. \tag{10.2}$$

► Demonstremos estas fórmulas por indução. Suponhamos que elas se verificam para um valor fixo de n, que representaremos por k:

$$\begin{aligned} p_k &= p_{k-1} b_k + p_{k-2} a_k; \\ q_k &= q_{k-1} b_k + q_{k-2} a_k, \end{aligned} \tag{10.3}$$

e demonstremos que, nesse caso, elas continuarão a ser verdadeiras para $n = k + 1$.

Analisando as expressões

$$\frac{p_k}{q_k} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \cfrac{a_k}{b_k}}}};$$

---

[1]ou seja,

$$\frac{p_2}{p_2} = \frac{\left(b_1 + \dfrac{a_2}{b_2}\right) b_0 + a_1}{b_1 + \dfrac{a_2}{b_2}} = \frac{\dfrac{b_2 b_1 + a_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2}{b_2}}{\dfrac{b_2 b_1 + a_2}{b_2}} = \frac{b_2\left(b_1 b_0 + a_1\right) + b_0 a_2}{b_2 b_1 + a_2}$$

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_k}{b_k + \cfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}}}},$$

notamos o seguinte: *para passar de* $\frac{p_k}{q_k}$ *para* $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, *é necessário* substituir b_k por $b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$. Efectuemos essa substituição nas fórmulas (10.3) e calculemos $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. Ao fazê-lo, os números p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1}, q_{k-1}, não sofrerão alterações, visto que as suas expressões não incluem b_k.

$$\begin{aligned}
\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} &= \frac{p_{k-1}\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) + p_{k-2}a_k}{q_{k-1}\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) + q_{k-2}a_k} \\
&= \frac{\frac{1}{b_{k+1}}\left[\left(p_{k-1}b_k + p_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + p_{k-1}a_{k+1}\right]}{\frac{1}{b_{k+1}}\left[\left(q_{k-1}b_k + q_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + q_{k-1}a_{k+1}\right]} \\
&= \frac{\left(p_{k-1}b_k + p_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + p_{k-1}a_{k+1}}{\left(q_{k-1}b_k + q_{k-2}a_k\right)b_{k+1} + q_{k-1}a_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Podemos cancelar o factor comum $\frac{1}{b_{k+1}}$; teremos então

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k b_{k+1} + p_{k-1}a_{k+1}; \\
q_{k+1} &= q_k b_{k+1} + q_{k-1}a_{k+1}.
\end{aligned}$$

Obtivemos as fórmulas (10.3) com o valor de k substituído por $k+1$.
Além disso, já vimos que as fórmulas (10.1) são válidas no caso de $n = 2$. Deste modo, está demonstrado que elas são válidas para $n \geq 2$. ■

Nota: Se compararmos a reduzida de ordem 1,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1} = \frac{p_0 b_1 + a_1}{q_1},$$

com a que resulta do prolongamento do sistema (10.1) a $n = 1$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_0 b_1 + p_{-1}a_1}{q_0 b_1 + q_{-1}a_1},$$

vemos que se fizermos

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases}$$

as relações de recorrência (10.1) passam a ser válidas para $n \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_n = p_{n-1}b_n + p_{n-2}a_n & p_{-1} = 1 & p_0 = b_0, \\ q_n = q_{n-1}b_n + q_{n-2}a_n & q_{-1} = 0 & q_0 = 1, \\ & n \geq 1. & \end{array} \right. \tag{10.4}$$

Se acrescentarmos à sucessão de reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ os dois termos correspondentes a -1 e 0, obtemos a sucessão

$$\frac{1}{0}, \frac{b_0}{1}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots \ .$$

Se a_n, b_n forem inteiros, positivos ou negativos, estas relações de recorrência (10.1) devem ser encaradas apenas como formais, pois a fracção contínua

$$b_0 + \mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{b_n+}\cdots$$

pode não ser convergente, ou seja, não existir $b_0 + \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$.

Se $b_0 = 0$, temos

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_n = p_{n-1}b_n + p_{n-2}a_n & p_{-1} = 1 & p_0 = 0, \\ q_n = q_{n-1}b_n + q_{n-2}a_n & q_{-1} = 0 & q_0 = 1, \\ & n \geq 1, & \end{array} \right.$$

e a sucessão associada à fracção contínua

$$\mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{b_n+}\cdots$$

é a sucessão

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots \ .$$

Suponhamos que a_1 é um número inteiro positivo, os números a_n ($n \geq 2$) são inteiros negativos e os números b_n são inteiros positivos; então $-a_n$ são positivos ($n \geq 2$) e podemos escrever o desenvolvimento da fracção contínua $\mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ em qualquer das formas

$$\mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{b_n+}\cdots \ = \frac{a_1}{b_1-}\frac{-a_2}{b_2-}\cdots\frac{-a_n}{b_n-}\cdots \ ;$$

sendo, na segunda, os números a_1, $-a_n$ ($n \geq 2$) e b_n ($n \geq 1$) todos positivos.

10.1.1. *Exemplo: Fracção contínua de* $\zeta(3)$.

Consideremos as sucessões u_n e v_n que verificam, respectivamente, as relações de recorrência

$$\left\{\begin{array}{c} (n+1)^3 u_{n+1} - \mathcal{P}_n\, u_n + n^3 u_{n-1} = 0, \qquad u_0 = 0, \qquad u_1 = 6; \\ (n+1)^3 v_{n+1} - \mathcal{P}_n\, v_n + n^3 v_{n-1} = 0, \qquad v_0 = 1, \qquad v_1 = 5; \\ n \geq 1, \end{array}\right. \tag{10.5}$$

em que $\mathcal{P}_n$ é o polinómio em n

$$\mathcal{P}_n = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5.$$

Vamos determinar o desenvolvimento em fracção contínua de $\zeta(3)$, sabendo que a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ tende para $\zeta(3)$. No entanto, em vez de utilizarmos directamente esta sucessão, usamos outra, igualmente tendente para $\zeta(3)$, obtida a partir das seguintes mudanças de variáveis:

$$p_n = n!^3 u_n, \qquad q_n = n!^3 v_n \tag{10.6}$$

Tendo em conta que $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{u_n}{v_n}$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ tende para o mesmo limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$; além disso, a transformação (B) permite, como veremos de seguida, passar duma solução do sistema (A) a uma solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{c} p_{n+1} - \mathcal{P}_n\, p_n + n^6 p_{n-1} = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad p_1 = 6; \\ q_{n+1} - \mathcal{P}_n\, q_n + n^3 q_{n-1} = 0, \qquad q_0 = 1, \qquad q_1 = 5; \\ n \geq 1, \end{array}\right. \tag{10.7}$$

e vice-versa, possibilitando, assim, utilizar estas relações de recorrência de p_n e q_n para estabelecer a fracção contínua que lhes está associada, ou seja, uma fracção contínua que é convergente para $\zeta(3)$. Para obtermos (10.5), basta substituir (10.6) em (10.7):

$$\left\{\begin{array}{c} (n+1)!^3 u_{n+1} - \mathcal{P}_n\, n!^3 u_n + n^6 (n-1)!^3 u_{n-1} = 0, \qquad u_0 = 0, \qquad u_1 = 6; \\ (n+1)!^3 v_{n+1} - \mathcal{P}_n\, n!^3 v_n + n^6 (n-1)!^3 v_{n-1} = 0, \qquad v_0 = 1, \qquad v_1 = 5; \\ n \geq 1. \end{array}\right.$$

e dividir ambos os membros destas recorrências por $n^3 (n-1)!^3$. Agora, vamos escrever (10.7) na forma

$$\left\{\begin{array}{c} p_n = \mathcal{P}_{n-1}\, p_{n-1} - (n-1)^6 p_{n-2} = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad p_1 = 6; \\ q_n = \mathcal{P}_{n-1}\, q_{n-1} - (n-1)^6 q_{n-2} = 0, \qquad q_0 = 1, \qquad q_1 = 5; \\ n \geq 2, \end{array}\right.$$

e comparar com as relações (10.1) e as condições iniciais (10.2) associadas, isto é

$$p_0 = b_0 = 0, \qquad q_0 = 1, \qquad p_1 = b_1 b_0 + a_1 = b_1 \cdot 0 + a_1 = a_1 = 6, \qquad q_1 = b_1 = 5.$$

Teremos então

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 5, \qquad a_1 = 6$$

e

$$a_n = -\left(n-1\right)^6, \qquad b_n = \mathcal{P}_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Por conseguinte, o desenvolvimento de $\zeta\left(3\right)$ em fracção contínua é

$$\begin{aligned}\zeta\left(3\right) &= \mathcal{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{6}{5-\cfrac{1}{117-\cfrac{64}{535-\ddots-\cfrac{n^6}{34n^3+51n^2+27n+5-\ddots}}}} \\ &= \frac{6}{5-}\frac{1}{117-}\frac{64}{535-}\cdots\frac{n^6}{34n^3+51n^2+27n+5-}\cdots\end{aligned}$$

10.2. **Transformação das somas parciais de $\zeta\left(n\right)$ em fracção contínua.** Vou mostrar que

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^n} = K_{j=1}^{N}\left(\frac{a_j\left(n\right)}{bj\left(n\right)}\right) = \frac{1}{1+K_{j=1}^{N}\left(\dfrac{-j^{2n}}{\left(j+1\right)^n+j^n}\right)},$$

pelo que

$$\zeta\left(n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n} = \frac{1}{1+K_{j=1}^{+\infty}\left(\dfrac{-j^{2n}}{\left(j+1\right)^n+j^n}\right)}.$$

A ideia básica é comparar duas relações de recorrência: a das somas parciais de $\zeta\left(n\right)$

$$s_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^n} = \frac{p_N}{q_N}$$

que verifica

$$s_N = s_{N-1}+\frac{1}{N^n} = \frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}+\frac{1}{NK^n} = \frac{N^n p_{N-1}+q_{N-1}}{N^n q_{N-1}} = \frac{p_N}{q_N} \qquad N \geq 2,$$

ou seja

$$\begin{aligned}p_N &= N^n p_{N-1}+q_{N-1} \qquad N \geq 1,\\ q_N &= N^n q_{N-1};\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}p_{N-1} &= \left(N-1\right)^n p_{N-2}+q_{N-2} \qquad N \geq 2,\\ q_{N-1} &= \left(N-1\right)^n q_{N-2},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_N &= N^n p_{N-1} + q_{N-1} \\ &= N^n \left((N-1)^n p_{N-2} + q_{N-2} \right) + (N-1)^n q_{N-2} \\ &= N^n (N-1)^n p_{N-2} + \left(N^n + (N-1)^n \right) q_{N-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_N &= N^n q_{N-1} \\ &= N^n (N-1)^n q_{N-2}; \end{aligned}$$

e a da fracção contínua

$$K_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j(n)}{bj(n)} \right) = \frac{p_N}{q_N}$$

que é

$$\begin{aligned} p_N &= b_N\ p_{N-1} + a_N\ p_{N-2} \\ q_N &= b_N\ q_{N-1} + a_N\ q_{N-2}. \end{aligned}$$

Compilo estas relações

$$\begin{aligned} p_N &= b_N\ p_{N-1} + a_N\ p_{N-2} \\ &= b_N\ \left((N-1)^n p_{N-2} + q_{N-2} \right) + a_N\ p_{N-2} \\ &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ p_{N-2} + b_N\ q_{N-2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_N &= b_N\ q_{N-1} + a_N\ q_{N-2} \\ &= b_N\ (N-1)^n q_{N-2} + a_N\ q_{N-2} \\ &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ q_{N-2} \end{aligned}$$

Agora comparo as duas formas de exprimir p_N e q_N :

$$\begin{aligned} p_N &= N^n (N-1)^n p_{N-2} + \left(N^n + (N-1)^n \right) q_{N-2} \\ p_N &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ p_{N-2} + b_N\ q_{N-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_N &= N^n (N-1)^n q_{N-2} \\ q_N &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ q_{N-2} \end{aligned}$$

Igualo

$$\begin{aligned} N^n (N-1)^n p_{N-2} + \left(N^n + (N-1)^n \right) q_{N-2} &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ p_{N-2} + b_N\ q_{N-2} \\ N^n (N-1)^n q_{N-2} &= \left(b_N\ (N-1)^n + a_N \right)\ q_{N-2} \end{aligned}$$

Deve ser

$$\begin{aligned} b_N\ (N-1)^n + a_N &= N^n (N-1)^n \\ b_N &= N^n + (N-1)^n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_N &= N^n (N-1)^n - b_N \ (N-1)^n \\ &= N^n (N-1)^n - (N^n + (N-1)^n)(N-1)^n \\ &= N^n (N-1)^n - N^n (N-1)^n - (N-1)^{2n} \\ &= -(N-1)^{2n}. \end{aligned}$$

Portanto, para $N \geq 2$

$$\begin{aligned} a_N &= -(N-1)^{2n} \\ b_N &= N^n + (N-1)^n, \end{aligned}$$

ou na notação acima

$$\begin{aligned} a_j(n) &= -(j-1)^{2n} \qquad j \geq 2 \Leftrightarrow a_{j+1}(n) = -j^{2n} \qquad j \geq 1 \\ b_j(n) &= j^n + (j-1)^n \qquad \Leftrightarrow b_{j+1}(n) = (j+1)^n + j^n \end{aligned}$$

Para $N = 1$, como

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$a_1 = b_1 = 1.$$

Obtive, como queria mostrar,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^n} = K_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j(n)}{bj(n)} \right) = \frac{1}{1 + K_{j=1}^{N} \left(\frac{-j^{2n}}{(j+1)^n + j^n} \right)}.$$

Casos particulares

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1 + K_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{-j^4}{(j+1)^2 + j^2} \right)}$$

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1 + K_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{-j^6}{(j+1)^3 + j^3} \right)}$$

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{1 + K_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{-j^8}{(j+1)^4 + j^4} \right)}$$

$$\zeta(5) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} = \frac{1}{1 + K_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{-j^{10}}{(j+1)^5 + j^5} \right)}$$

11. Método de eliminação de Gauss e Matriz inversa

Definição: A matriz inversa da matriz quadrada A é a matriz A^{-1} que verifica a igualdade

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \qquad \text{em que } I \text{ é a matriz identidade.}$$

Cálculo: Exemplo para uma matriz 3×3. Partindo da matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

amplia-se a matriz A, de maneira a formar as três matrizes

$$\begin{aligned}
(A|i_1) &= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right) \\
(A|i_2) &= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right) \\
(A|i_3) &= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

De seguida, trocam-se as linhas de cada uma destas matrizes ampliadas, e aplica-se o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial – que será visto a seguir sob a forma de exemplo – para obter, respectivamente, as seguintes três matrizes ampliadas

$$(U|j_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & j_{11} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & j_{21} \\ 0 & 0 & u_{33} & j_{31} \end{array}\right)$$

$$(U|j_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & j_{12} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & j_{22} \\ 0 & 0 & u_{33} & j_{32} \end{array}\right)$$

$$(U|j_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & j_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & j_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} & j_{33} \end{array}\right)$$

em que U é a matriz triangular superior

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Resolvendo agora, por substituição inversa, isto é, a terceira, seguida da segunda e depois da primeira linha, respectivamente, os sistemas

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} \\ j_{21} \\ j_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{12} \\ j_{22} \\ j_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{13} \\ j_{23} \\ j_{33} \end{pmatrix}$$

obtêm-se as soluções

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

que são precisamente as colunas da matriz inversa A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (x|y|z)$$

Determinante: Os elementos da diagonal da matriz triangular superior U permitem calcular o determinante de A:

$$\det(A) = (-1)^s \, u_{11}u_{22}u_{33}$$

em que *s é o número de trocas de linhas efectuadas na eliminação de Gauss com pivotagem parcial.*

Exemplo

a) Resolva o sistema seguinte utilizando o *método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 380 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 400 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 520 \end{cases}$$

b) Calcule a inversa e o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

Resolução

a) Matriz ampliada: a matriz ampliada correspondente ao sistema $Ax = b$

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 400 \\ 520 \end{pmatrix} = b$$

é a matriz $(A|b)$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 380 \\ 2 & 4 & 2 & | & 400 \\ 6 & 2 & 2 & | & 520 \end{pmatrix}$$

Pivotagem parcial : trocamos linhas completas de maneira a colocar na posição $(1,1)$ da diagonal principal o elemento da coluna 1, abaixo da diagonal principal, que tem maior módulo, ou seja trocamos as linhas 1 e 3. *Esta troca tem como objectivo diminuir os erros numéricos associados ao cálculo dos multiplicadores que serão determinados a seguir.*

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 380 \\ 2 & 4 & 2 & | & 400 \\ 6 & 2 & 2 & | & 520 \end{pmatrix} \quad \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 2 & 4 & 2 & | & 400 \\ 3 & 4 & 1 & | & 380 \end{pmatrix}$$

Redução de A à forma triangular superior U : cálculo dos multiplicadores

Para anular as linhas 2 e 3 da coluna 1 de

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 2 & 4 & 2 & | & 400 \\ 3 & 4 & 1 & | & 380 \end{pmatrix}$$

utilizamos os multiplicadores das linhas 2 e 3 da coluna 1, respectivamente:

$$m_{21} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \qquad m_{31} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Utilizamos o 6 como pivot

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 2 & 4 & 2 & | & 400 \\ 3 & 4 & 1 & | & 380 \end{pmatrix} \quad \overset{\substack{L_2' = -\frac{1}{3}L_1 + L_2 \\ L_3' = -\frac{1}{2}L_1 + L_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & \frac{680}{3} \\ 0 & 3 & 0 & | & 120 \end{pmatrix}$$

multiplicando a primeira linha por, respectivamente, m_{21} e m_{31} e somando-lhe a linha 2 e a 3:

$$\tilde{a}_{21}' = 0 \quad \tilde{a}_{22}' = -\frac{1}{3}2 + 4 = \frac{10}{3} \quad \tilde{a}_{22}' = -\frac{1}{3}2 + 2 = \frac{4}{3} \quad \tilde{b}_2' = -\frac{1}{3}520 + 400 = \frac{680}{3}$$

$$\tilde{a}_{31}' = 0 \quad \tilde{a}_{32}' = -\frac{1}{2}2 + 4 = 3 \quad \tilde{a}_{33}' = -\frac{1}{2}2 + 1 = 0 \quad \tilde{b}_3' = -\frac{1}{2}520 + 380 = 120$$

e agora já não necessitamos de trocar as linhas 2 e 3, porque $\frac{10}{3} > 3$; sendo, então, $\frac{10}{3}$ pivot, multiplicamos a segunda linha pelo multiplicador

$$m_{32} = -\frac{3}{\frac{10}{3}} = -\frac{9}{10}$$

e somamo-la à terceira:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & \frac{680}{3} \\ 0 & 3 & 0 & | & 120 \end{array}\right) \underrightarrow{L_3' = -\frac{9}{10}L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 2 & | & 520 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & \frac{680}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & | & -84 \end{array}\right) = (U|c)$$

$$\hat{a}_{32}' = 0 \qquad \hat{a}_{33}' = -\frac{9}{10}\frac{4}{3} + 0 = -\frac{6}{5} \qquad \hat{b}_3' = -\frac{9}{10}\frac{680}{3} + 120 = -84$$

Substituição inversa: fazendo a substituição inversa no sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 520 \\ & & \frac{10}{3}x_2 & + & \frac{4}{3}x_3 & = & \frac{680}{3} \\ & & & & -\frac{6}{5}x_3 & = & -84 \end{array}\right.$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-84}{-\frac{6}{5}} = 70 \\ x_2 &= \frac{\frac{680}{3} - \frac{4}{3}\cdot 70}{\frac{10}{3}} = 40 \\ x_1 &= \frac{520 - 2\cdot 40 - 2\cdot 70}{6} = 50 \end{aligned}$$

Resposta da alínea a)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$$

b) Matriz inversa: partindo da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

amplia-se esta matriz, de maneira a formar as três matrizes

$$
\begin{aligned}
(A|i_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \\
(A|i_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \\ 6 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \\
(A|i_3) &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aplica-se o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial a cada uma destas matrizes: a *primeira* transforma-se sucessivamente em

$$
(A|i_1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \quad \left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_1\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_1\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\substack{L_2' = -\frac{2}{6}L_1 + L_2 \\ L_3' = -\frac{3}{6}L_1 + L_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L_3' = -\frac{9}{10}L_2 + L_3}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & | & 1 \end{pmatrix} = (U|j_1)
$$

O mesmo método aplicado à *segunda* matriz dá

$$
(A|i_2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \\ 6 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \quad \left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_2\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_2\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\substack{L_2' = -\frac{2}{6}L_1 + L_2 \\ L_3' = -\frac{3}{6}L_1 + L_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L_3' = -\frac{9}{10}L_2 + L_3}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & | & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & | & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} = (U|j_2)
$$

Para a *terceira* vem

$$(A|i_3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \underrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \quad \left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_3\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\tilde{A}|\tilde{\imath}_3\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \underrightarrow{\substack{L_2' = -\frac{2}{6}L_1 + L_2 \\ L_3' = -\frac{3}{6}L_1 + L_3}} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} & | & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & | & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underrightarrow{L_3' = -\frac{9}{10}L_2 + L_3} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} & | & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{6}{5} & | & -\dfrac{2}{10} \end{pmatrix} = (U|j_3)$$

Resolvendo agora, por substituição inversa, respectivamente, os sistemas

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -2/10 \end{pmatrix}$$

obtêm-se as soluções

$$x = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

que são precisamente as três colunas da matriz inversa A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/4 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & -1/6 \\ -5/6 & 3/4 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Observação: Como a matriz A é única nos três casos, pode dispor-se o cálculo da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_2' = -\frac{2}{6}L_1 + L_2 \\ L_3' = -\frac{3}{6}L_1 + L_3}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = -\frac{9}{10}L_2 + L_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -6/5 & 1 & -9/10 & -2/10 \end{array}\right)$$

A partir daqui faz-se como acima, isto é, resolve-se, por substituição inversa, respectivamente, os sistemas

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -2/10 \end{pmatrix}$$

para obter as soluções

$$x = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

que são as colunas da matriz inversa A^{-1}.

Determinante: os elementos da diagonal da matriz triangular superior U permitem calcular o determinante de A:

$$\det(A) = (-1)^s \, u_{11} u_{22} u_{33}$$

em que *s é o número de trocas de linhas efectuadas na eliminação de Gauss com pivotagem parcial.* Como

$$U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

e só houve uma toca de linhas $L_1 \longleftrightarrow L_3$, $s = 1$; donde

$$\det(A) = -u_{11}u_{22}u_{33} = -6 \cdot \frac{10}{3}\left(-\frac{6}{5}\right) = 24$$

12. Exemplos e exercícios de Cálculo

12.1. Fórmula de reflexão (da função gama) de Euler.

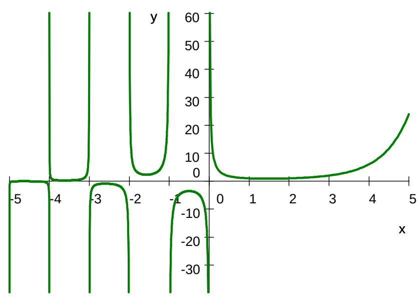


Gráfico de $\Gamma(x), x \in]-5, 5]$

A função especial beta é definida para as variáveis reais x, y pelo integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{12.1}$$

que é impróprio mas convergente, no caso de $x > 0$ e $y > 0$ e pelo menos uma das variáveis $x < 1$ ou $y < 1$.

A função $B(x, y)$ (para $x > 0$ e $y > 0$) relaciona-se com a função especial gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{12.2}$$

através da conhecida identidade

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{12.3}$$

que não vou demonstrar.

O que me proponho demonstrar é a chamada fórmula da reflexão ou dos complementos da função gama no domínio real, seguindo o método indicado nos exercícios não resolvidos 10 e 11 da página 683 do livro de Angus E. Taylor, Advanced Calculus, Blaisdell Publishing Company, 1955 [14].

Proposição: *Se a for real, é válida a identidade seguinte*

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \pi \csc a\pi = B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) \tag{12.4}$$

Notação: $\csc a\pi = 1/\sin a\pi$ é a cosecante de $a\pi$.

Demonstração: Se $0 < a < 1$, tem-se

$$\int_1^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\, dx$$

como resulta da mudança de variável $y = 1/x$. O integral

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\, dx$$

é convergente se $a < 1$, porque nesta condição $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\, dx$ é convergente e $\frac{x^{-a}}{1+x} \cdot x^a$ tende para 1, quando x tende para 0^+, e, por outro lado, o integral

$$\int_1^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy$$

também nesse caso é convergente, porque $\int_1^\infty \frac{dy}{y^{2-a}}$ converge e $\frac{y^{a-1} \cdot y^{2-a}}{1+y}$ tende para 1, quando y tende para ∞.

Outra representação integral da função beta é:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du \tag{12.5}$$

que se obtém de (12.2) através das substituição

$$t = \frac{u}{1+u}.$$

De (12.5) resulta

$$\begin{aligned} B(a, 1-a) &= \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{1+u} du + \int_1^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{1+u} du + \int_0^1 \frac{u^{-a}}{1+u} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{a-1} + u^{-a}}{1+u} du \end{aligned}$$

Usando agora o desenvolvimento em série de

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n u^n,$$

obtêm-se

$$\frac{u^{a-1}}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,u^{a-1+n}$$

e

$$\frac{u^{a}}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,u^{-a+n},$$

e integrando termo a termo a função integranda $\dfrac{u^{a-1}+u^{-a}}{1+u}$, como

$$(-1)^n\int_0^1 u^{a-1+n}du=\frac{(-1)^n}{a+n}$$

e

$$(-1)^n\int_0^1 u^{-a+n}du=\frac{(-1)^n}{-a+n+1},$$

depois de agrupar os termos pares da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}$$

com os ímpares da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{-a+n+1}$$

obtém-se no fim a série

$$\frac{1}{a}+2a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}.$$

Em consequência

$$B(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{1}{a}+2a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}$$

Ora, a série de Fourier da função $f(x)=\pi\cos ax$, em que $-\pi\leq x\leq\pi$, é

$$\pi\cos ax=2a\sin a\pi\left(\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-a^2}\right)$$

que assume o desenvolvimento particular $x=0$:

$$\pi=\sin a\pi\left(\frac{1}{a}+2a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\right)$$

donde, efectivamente

$$\frac{x}{\sin a\pi}=\pi\csc a\pi=B(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)\qquad\square$$

Esta mesma identidade também se verifica para a complexo.

Para $a = 1/2$ obtém-se

$$\frac{\pi}{\sin \pi/2} = \Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2)$$

donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{12.6}$$

12.2. **Comprimentos de arcos rectificáveis.**

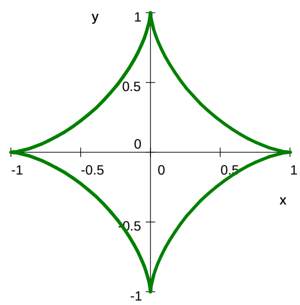
12.2.1. *Perímetro da astróide.* A hipociclóide é a curva descrita por um ponto P de uma circunferência que rola, sem escorregar, interiormente sobre outra. Se o raio da circunferência exterior for quádruplo do da interior, a curva é conhecida por *astróide* – não confundir com asteróide – e as suas equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}$$

e a cartesiana,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

O gráfico, para $a = 1$, é o seguinte



Sabe-se que, se a derivada de uma função real f existir e for contínua no intervalo $[a, b]$, o gráfico de f é rectificável e o seu comprimento L, entre dois pontos de abcissa a e b, é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \tag{12.7}$$

ou, se x, y forem funções reais da variável real t

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \end{aligned}$$

com primeira derivada contínua, então

$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(x)] + [\psi'(x)]^2}dx\ . \tag{12.8}$$

Prove que qualquer número representado por uma dízima periódica é racional.

Determine o perímetro da curva representada $(a = 1)$.

Sugestão: calcule através do 2^o. integral o comprimento do troço da astróide definido por $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ e daí obtenha o perímetro.

Resolução

Vou seguir a sugestão, uma vez que a curva, por ser simétrica em relação aos dois eixos, o seu perímetro L é quatro vezes o valor do integral seguinte

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left[(\cos^3 t)'\right]^2 + \left[(\sin^3 t)'\right]^2} = \sqrt{(-3\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + \left(3\sin^2 t \cdot \cos t\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t \cdot \sin^2 t} dt = 3\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t = 3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

logo

$$L = 4I = 6.$$

12.3. **Tangente à elise.** Seja $f(x)$ uma função real e $f'(x)$ a sua derivada. É bem sabido que a recta tangente ao gráfico da curva $y = f(x)$ no ponto de coordenadas (x_0, y_0) tem como coeficiente angular $y_0' = f'(x_0)$, sendo, portando, a sua equação da forma $y = f'(x_0)x + b$. O facto de passar por (x_0, y_0) permite determinar b

$$b = y_0 - f'(x_0)x_0$$

pelo que a equação da recta tangente é então

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0 \\ y &= y_0'x + y_0 - y_0'x_0. \end{aligned}$$

Suponha o leitor que tem uma elipse centrada na origem e de semi-eixos maior e menor $a > 0$ e $b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para achar a equação da tangente à elise em (x_0, y_0), portanto

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

podemos começar por exprimir y em função de x

$$y = \begin{cases} f(x) = +b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} & \text{se } y > 0 \\ g(x) = -b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e determinar a sua derivada. Na parte superior da elise ($y > 0$) tem-se

$$y' = f'(x) = -\frac{bx}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

e no ponto (x_0, y_0)

$$y_0' = f'(x_0) = -\frac{bx_0}{a^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)^{-1/2} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Na inferior ($y < 0$), em que $g(x) = -f(x)$ e y_0 é simétrico em relação ao eixo dos x ao correspondente ponto da metade superior, passa a ser respectivamente

$$y' = -f'(x) = \frac{bx}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

e

$$y_0' = -f'(x_0) = \frac{bx_0}{a^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)^{-1/2} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Assim, a equação da tangente é

$$\begin{aligned} y &= y_0'x + y_0 - y_0'x_0 \\ &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0} \\ &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x + \frac{b^2}{y_0} \end{aligned}$$

dado que da equação da elise se deduz

$$y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0} = \frac{b^2}{y_0}.$$

Se θ for o ângulo usado em coordenadas polares entre a recta que passa pela origem $(0,0)$ e pelo ponto genérico da elipse (x, y) e o eixo dos x, a relação com as coordenadas cartesianas é $(x, y) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$; se θ_0 for o ângulo no ponto de tangência, então $(x_0, y_0) = (a\cos\theta_0, b\sin\theta_0)$. Substituindo na equação da recta tangente

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x + \frac{b^2}{y_0}$$

após algumas manipulações chega-se a

$$\frac{\cos\theta_0}{a}x + \frac{\sin\theta_0}{b}y = 1.$$

12.4. **Derivadas: a total de uma função de duas variáveis reais e de uma função elevada a outra função.** Proponho-me demostrar a seguinte regra de derivação

$$\frac{d}{dt}\left[u\left(t\right)\right]^{v(t)}=v\left(t\right)\left[u\left(t\right)\right]^{v(t)-1}u'(t)+\left(\ln u\left(t\right)\right)\left[u\left(t\right)\right]^{v(t)}v'(t)$$

como aplicação do seguinte teorema relativo à derivada total em relação a t de uma função de duas variáveis reais ambas função de t.

Teorema: *Sejam* $z=f\left(x,y\right)$ *uma aplicação de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$ diferenciável em $\left(x_0,y_0\right)$ e $x=\varphi\left(t\right)$ e $y=\psi\left(t\right)$ *duas aplicações de* $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ *diferenciáveis em* t_0.

Então

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

Demonstração: seja Δz o incremento de $z=f\left(x,y\right)$ em $\left(x_0,y_0\right)$ associado a um incremento Δt em t_0:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0+\Delta t\right)\right)-f\left(\varphi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right)\\ &= \left[f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0+\Delta t\right)\right)-f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0\right)\right)\right]\\ &\quad+\left[f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0\right)\right)-f\left(\varphi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Por hipótese, φ e ψ são diferenciáveis em t_0 pelo que existem números reais ξ,η que tendem ambos para 0 com Δt tais que

$$\begin{aligned}h &= \varphi\left(t_0+\Delta t\right)-\varphi\left(t_0\right)=\Delta t\left(\varphi'\left(t_0\right)+\xi\right)\\ k &= \psi\left(t_0+\Delta t\right)-\psi\left(t_0\right)=\Delta t\left(\psi'\left(t_0\right)+\eta\right)\end{aligned}$$

Admitindo que f'_y é contínua existe um número real θ $\left(0<\theta<1\right)$ tal que a primeira parcela de Δz se pode exprimir na forma

$$\begin{aligned}f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0+\Delta t\right)\right)-f\left(\varphi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right) &= kf'_y\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0+\theta k\right)\right)\\ &= k\left(f'_y\left(x_0,y_0\right)+\beta\right)\end{aligned}$$

A variável real β tende para 0 com Δt. Existe ainda outra variável real α que também tende para 0 com Δt; é tal que a segunda parcela de Δz é da forma

$$f\left(\varphi\left(t_0+\Delta t\right),\psi\left(t_0\right)\right)-f\left(\varphi\left(t_0\right),\psi\left(t_0\right)\right)=h\left(f'_x\left(x_0,y_0\right)+\alpha\right)$$

Vem, portanto

$$\Delta z=h\left(f'_x\left(x_0,y_0\right)+\alpha\right)+k\left(f'_y\left(x_0,y_0\right)+\beta\right)$$

Assim, tem-se

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\varphi'\left(t_0\right)f'_x\left(x_0,y_0\right)+\psi'\left(t_0\right)f'_y\left(x_0,y_0\right)+\varepsilon$$

em que

$$\varepsilon = \xi f'_x(x_0, y_0) + \varphi'(t_0)\,\alpha + \xi\alpha + \psi'(t_0)\,\beta + \eta f'_y(x_0, y_0) + \eta\beta$$

que tende para 0 com Δt. Logo

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \varphi'(t_0)\,\varphi'(x_0, y_0) + \psi'(t_0)\,\psi'(x_0, y_0)$$

como se queria demonstrar □

Exemplo 1: demostre a seguinte regra de derivação

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)\right]^{v(t)} = v(t)\left[u(t)\right]^{v(t)-1} u'(t) + (\ln u(t))\left[u(t)\right]^{v(t)} v'(t)$$

Neste caso temos $z = f(x, y) = u^v$, em que $x = u(t)$ e $y = v(t)$. A derivada $f'(t)$ será

$$f'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= yx^{y-1} = v(t)\left[u(t)\right]^{v(t)-1} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (\ln x)\, x^y = (\ln u(t))\left[u(t)\right]^{v(t)} \end{aligned}$$

donde se chega imediatamente à regra enunciada. ◀

Exemplo 2: determine $(x^x)'$

Aplica-se a regra do exemplo 1:

$$(x^x)' = xx^{x-1} + (\ln x)\, x^x = (1 + \ln x)\, x^x \quad ◀$$

NOTA: a regra de derivação do exemplo 1 pode ser deduzida sem recorrer ao teorema da derivada da função composta, reparando que

$$\left[u(t)\right]^{v(t)} = e^{v(t)\ln(u(t))}$$

atendendo a que $u(t) = e^{\ln(u(t))}$ e aplicando de seguida a regra de derivação da função exponencial.

13. Métodos numéricos

13.1. Método da secante de determinação da raiz de uma equação não linear. Suponha que tem a seguinte relação

$$y = \frac{(1+x)^{10} - 1}{x}$$

e que pretende calcular x para um dado valor de y. Por exemplo $y = 15$. Então, a situação equivale a determinar a raiz da equação não linear

$$\frac{(1+x)^{10} - 1}{x} - 15 = 0.$$

No caso geral tem-se uma equação não linear

$$f(x) = 0$$

e quere-se determinar numericamente o seu zero ou raiz. Pelo método da secante partimos dos valores iniciais x_1 e x_2 e geramos uma sucessão de valores x_i $(i = 2, 3, \ldots)$ até nos aproximarmos da solução da equação. Paramos quando estivermos suficientemente próximos do zero, no sentido de chegarmos à aproximação desejada.

A recta que passa por $(x_1, y_1 = f(x_1))$ e por $(x_2, y_2 = f(x_2))$ tem o coeficiente angular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e a sua equação é

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

Cruza o eixo dos x no ponto de abcissa x_3

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \times \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Se tomarmos agora a recta que passa pelos pontos $(x_2, y_2 = f(x_2))$ e $(x_3, y_3 = f(x_3))$, chegamos à intersecção com o eixo dos x na abcissa x_4 dada por

$$x_4 = x_3 - f(x_3) \times \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)}.$$

Em geral, para o inteiro $k = 2, 3, 4, \ldots$ obtemos, por este método, a aproximação

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \times \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Para o exemplo inicial, se escolhermos $x_1 = 0,05$ e $x_2 = 0,15$, obtemos sucessivamente $x_3 = 0,081350791$, $x_4 = 0,086390197, x_5 = 0,087335225, x_6 = 0,087320486, x_7 = 0,087320522, \ldots$.

A função $f(x)$ toma os valores $f(x_5) = 0,001051291$, $f(x_6) = -2,57456 \times 10^{-6}$, $f(x_7) = -9,9611 \times 10^{-11}$. O zero da função é então cerca de $0,08732$.

Este exemplo foi escolhido para calcular numericamente a taxa i a que devem ser depositadas anualmente, durante dez anos, quantias numa conta, de modo que o seu saldo venha a ser igual a 15 anuidades.

Dada a fórmula aplicável a esta série uniforme

$$\frac{F}{A} = \frac{(1+i)^{10} - 1}{10} = 15,$$

a taxa de juro deve ser $8,732\%$.

13.2. **Método de Newton de determinação da raiz de uma equação não linear.** Se tiver uma equação não linear

$$f(x) = 0$$

e pretender determinar numericamente um zero, pode utilizar o método da secante ou o de Newton que passo a expor. Pelo método de Newton partimos do valor inicial x_1 e geramos uma sucessão de valores x_i $(i = 1, 2, , \ldots)$ até nos aproximarmos da solução da equação. Paramos quando chegarmos à aproximação pretendida.

A recta que passa por $(x_1, y_1 = f(x_1))$ é dada pela equação:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

que intersecta o eixo dos x no ponto de abcissa x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Este valor permite gerar, pelo mesmo método, o novo valor

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

da abcissa do ponto de cruzamento da tangente a $f(x)$ no ponto $(x_2, y_2 = f(x_2))$ e assim sucessivamente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Como se vê este método obriga ao cálculo da derivada da função $f(x)$.

14. Séries de Fourier

14.1. **Sistemas de Funções Ortogonais.** Começo por considerar sistemas de funções ortogonais para desenvolver a questão da representação de uma função em série do tipo

$$f(x) = \sum_n c_n \phi_n(x)$$

em que $\phi_n(x)$ são precisamente funções ortogonais em $[a, b]$.

Chamam-se funções *ortogonais* às funções [complexas de variável real] que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \left(\phi_n \cdot \overline{\phi}_m\right) &= \int_a^b \phi_n(x)\,\overline{\phi_m(x)}dx = 0 \qquad \text{para } n \neq m \\ \left(\phi_n \cdot \overline{\phi}_m\right) &= \int_a^b \phi_n(x)\,\overline{\phi_m(x)}dx > 0 \qquad \text{para } n = m \end{aligned}$$

Revestem-se de grande interesse nas aplicações as funções do tipo $\cos nx$ e $\sin nx$.

Chama-se *norma* de um sistema de funções ortogonais a

$$||\phi_n|| = \sqrt{\left(\phi_n \cdot \overline{\phi}_n\right)} = \sqrt{\phi_n\left(x\right)\overline{\phi_n\left(x\right)}dx}$$

Um sistema ortogonal diz-se *ortonormado* se a sua norma for igual à unidade: $||\phi_n|| = 1$.

Exemplo 1: $\phi_n\left(x\right) = e^{inx}$ definida em $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\left(\phi_n \cdot \overline{\phi}_m\right) &= \int_{\pi}^{-\pi} \phi_n\left(x\right)\overline{\phi_m\left(x\right)}dx \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_{\pi}^{-\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{i\left(n-m\right)} \times \left[e^{i(n-m)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \int_{\pi}^{-\pi} dx = 2\pi & \text{para } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\left|\left|e^{inx}\right|\right| = \sqrt{2\pi}. \qquad \blacktriangleleft$$

Consideremos uma função de variável real $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right) = \sum_n c_n\phi_n\left(x\right) \qquad a \leq x \leq b$$

e as seguintes hipóteses:

(1) a série converge;
(2) converge para $f\left(x\right)$.

Multiplicando a série por $\overline{\phi_n\left(x\right)}$ vem

$$f\left(x\right)\overline{\phi_n\left(x\right)} = \sum_m c_m\phi_m\left(x\right)\overline{\phi_n\left(x\right)}$$

e

$$\int_a^b f\left(x\right)\overline{\phi_n\left(x\right)}dx = \sum_m c_m \int_a^b \phi_m\left(x\right)\overline{\phi_n\left(x\right)}dx$$

porque pode trocar-se a ordem de $\int$ e $\sum$, se admitirmos a convergência uniforme da série no intervalo $[a, b]$. Assim,

$$\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right) = c_n\left|\left|\phi_n\right|\right|^2,$$

ou seja,

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{\left|\left|\phi_n\right|\right|^2}.$$

Aos coeficientes c_n chamam-se os *coeficientes de Fourier*. À série chama-se *série de Fourier* relativa ao conjunto de funções ortogonais $\phi_n\left(x\right)$.

NOTA: esta dedução não é rigorosa!

Consideremos uma função $f(x)$ de quadrado integrável no intervalo $[a,b]$. Vamos aproximar $f(x)$ por uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)$$

Seja ϵ o erro quadrático médio. Vamos impor que ϵ^2 seja mínimo.

$$\epsilon^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \right|^2 dx$$

o que é o mesmo que

$$(b-a)\,\epsilon^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{\left|\left(f\cdot\overline{\phi}_n\right)\right|^2}{||\phi_n||^2} + \sum_{n=1}^{N}\left| c_n \times ||\phi_n|| - \frac{1}{||\phi_n||}\times\left(f\cdot\overline{\phi}_n\right)\right|^2.$$

DEDUÇÃO:

Dados dois complexos z e w, verifica-se

$$|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = |z|^2 + |w|^2 - z\overline{w} - \overline{z}w.$$

Assim, tem-se

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(x)\right|^2 = |f(x)|^2 + \left|\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n\right|^2 - f(x)\sum_{n=1}^{N}\overline{c}_n\overline{\phi_n(x)} - \overline{f(x)}\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(x),$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(x)\right|^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n\right)\overline{\left(\sum_{m=1}^{N} c_m\phi_m\right)} = \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c}_m\phi_n(x)\,\overline{\phi_m(x)}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left| c_n\,||\phi_n|| - \frac{1}{||\phi_n||}\int_a^b f(x)_n\,\overline{\phi_n(x)}dx\right|^2 \\
= &\ |c_n|^2\,||\phi_n||^2 + \left|\frac{1}{||\phi_n||}\int_a^b f(x)_n\,\overline{\phi_n(x)}dx\right|^2 \\
&- c_n\,||\phi_n||\,\frac{1}{||\phi_n||}\int_a^b \overline{f(x)}_n\phi_n(x)\,dx - \overline{c_n}\,||\phi_n||\,\frac{1}{||\phi_n||}\int_a^b f(x)_n\,\overline{\phi_n(x)}dx
\end{aligned}$$

donde vai resultar

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \right|^2 dx \\
= &\int_a^b |f(x)|^2 \, dx + \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \right|^2 dx \\
&- \int_a^b f(x) \sum_{n=1}^{N} \overline{c}_n \overline{\phi_n(x)} dx - \int_a^b \overline{f(x)} \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \, dx, \\
= &\int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{\left|\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)\right|^2}{||\phi_n||^2} + \sum_{n=1}^{N} \left| c_n \times ||\phi_n|| - \frac{1}{||\phi_n||} \times \left(f \cdot \overline{\phi}_n\right) \right|^2
\end{aligned}
$$

ou seja, a fórmula acima que se repete:

$$(b-a)\,\epsilon^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{\left|\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)\right|^2}{||\phi_n||^2} + \sum_{n=1}^{N} \left| c_n \times ||\phi_n|| - \frac{1}{||\phi_n||} \times \left(f \cdot \overline{\phi}_n\right) \right|^2 .$$

Os termos

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=1}^{N} \frac{\left|\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)\right|^2}{||\phi_n||^2}$$

são independentes de c_n. Para minimizar ϵ deve ter-se

$$c_n \, ||\phi_n|| = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||}$$

que é equivalente a

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2}$$

ou a

$$|c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 = \left| \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2} \right|^2 ||\phi_n||^2 = \frac{\left|\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)\right|^2}{||\phi_n||^2} .$$

Vimos então que os *coeficientes da série de Fourier* c_n minimizam o erro quadrado médio.

$$(b-a)\,\epsilon_{\min}^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 \geq 0$$

Fazendo tender N para infinito, no limite tem-se a *desigualdade de Bessel*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 .$$

Se o sistema for ortonormado, $||\phi_n|| = 1$, e

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \int_a^b f(x) \, \overline{f(x)} dx = ||f||^2$$

Para as funções de quadrado integrável, a série

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \, ||\phi_n||$$

converge. A seguinte igualdade verifica-se, se e só se, o erro quadrático médio for nulo; então, será

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2$$

e o sistema de funções $\phi_n(x)$ é *completo*. Então

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \right|^2 dx = 0$$

Nestas condiçoes, diz-se que a série de Fourier *converge em média* para $f(x)$, mas a convergência não é necessariamente uniforme. Por definição uma série converge uniformemente para uma função quando simbolicamente se verificar

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N_1}{\exists} \; \underset{x\in[a,b]}{\forall} \quad N > N_1 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \right| < \varepsilon$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe um inteiro N_1 tal que, $N > N_1$ implica

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \right| < \varepsilon,$$

para todo o x no intervalo $[a, b]$. O facto essencial é que N_1 é independente de ε. Normalmente dependeria de ε.

14.2. **Relação de Parseval.** Anteriuormente abordei o caso dos sistemas completos, em que $\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)$ converge em média para $f(x)$. A convergência em média não implica *convergência em todos os pontos*.

Se considerarmos duas funções, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, que diferem apenas num número finito de pontos e calcularmos os coeficientes

$$c_n = \frac{\left(f_i \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2} \qquad (i = 1, 2)$$

obtemos o mesmo valor, visto que

$$\int_a^b f_i(x) \overline{\phi_n(x)} dx = \left(f_i(x) \cdot \overline{\phi_n(x)}\right) \qquad (i = 1, 2)$$

tem o mesmo valor para as duas funçoes, o que leva a que ambas sejam representadas pela mesma série de Fourier, ou seja, a série de Fourier pode não convergir para o valor da função num conjunto finito de pontos.

Para os sistemas completos é possível deduzir a seguinte relação:

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ representadas pelas séries

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum c_n \phi_n(x) \\ g(x) &= \sum d_n \phi_n(x) \end{aligned}$$

pode demonstrar-se

(1)

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \sum c_n \overline{d}_n \left|\left|\phi_n\right|\right|^2$$

(2)

$$\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx = \sum \left|c_n\right|^2 \left|\left|\phi_n\right|\right|^2$$

fazendo em 1. $g(x) = f(x)$.

À relação 1. costuma chamar-se *relação de Parseval* na forma *geral*; à seguinte, chamar-se-á relação de Parseval na forma *particular*. Se soubermos de antemão que um determinado sistema de funções é completo, podemos determinar a soma de certas séries de interesse prático, à custa da relação de Parseval.

Exemplo 2: O sistema de funções $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ é ortogonal no intervalo $[0, \pi]$. Determine os coeficientes de Fourier da série

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

e verifique que aquele sistema é completo em relação a esta função.

Começo por calcular as quantidades:

$$\begin{aligned} \left|\left|\phi_n\right|\right|^2 &= \left|\left|\sin nx\right|\right|^2 = \int_0^\pi \sin^2 nx \; dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2nx\right) \; dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin 2nx - \sin 0\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right) = \int_0^\pi \sin nx \; dx = -\frac{1}{n}\left(\cos nx - \cos 0\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Deste modo

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{\left|\left|\phi_n\right|\right|^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Podemos agora verificar se a igualdade

$$\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx = \sum \left|c_n\right|^2 \left|\left|\phi_n\right|\right|^2$$

é satisfeita: temos

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx = \pi$$

$$\sum_{1,3,\ldots}^{\infty} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 = \frac{16}{\pi^2}\frac{\pi}{2}\sum_{1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{8}{\pi}\frac{\pi^2}{8} = \pi = \int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx$$

o que significa que o sistema $\sin nx$ é completo em relação à função $f(x) = 1$, $x \in [0, \pi]$. ◀

NOTA: Utilizei a soma da série $\sum_{1,3,\ldots}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/8$. Um dos métodos é descrito no livro [14, p.717] e exposto mais à frente, na secção a seguir à da Série trigonométrica de Fourier:

Desenvolve-se em série trigonométrica de Fourier, que será vista posteriormente, a função $f(x) = \pi^2/4$, $x \in [-\pi, \pi]$, chegando-se a

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \cdots ,$$
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Somando estas duas séries, obtém-se

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

14.3. **Série trigonométrica de Fourier.** A série trigonométrica de Fourier é o caso particular das séries de Fourier que utiliza o sistema de funções ortogonais $\cos nx$ e $\sin nx$:

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \cdots$$

Sendo δ_{nm} o delta de Kronecker

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

os integrais envolvidos podem exprimir-se facilmente nos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \begin{cases} \pi\delta_{nm} & n, m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \pi\delta_{nm} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= 0 \qquad \forall n, m
\end{aligned}$$

Estas relações são válidas para qualquer outro intervalo de largura 2π.

Consideremos a seguinte série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

em que o símbolo $\sim$ sgnifica que $f(x)/\left[a_o/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right]\to 1$ quando $n\to\infty$.Os coeficientes a_n e b_n são os seguintes integrais

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \qquad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \qquad n=1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Admitamos que $f(x)$ é uma função de quadrado integrável e que ϕ_n é um sistema ortogonal; vimos que

$$c_n=\frac{\left(f\cdot\overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2}.$$

Neste caso as três normas são dadas por

$$||1||^2=\int_{-\pi}^{\pi}1^2\ dx=2\pi$$

$$\begin{aligned} ||\sin nx||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2nx\right)\ dx=\pi \\ ||\cos nx||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2nx\right)\ dx=\pi \end{aligned}$$

e os coeficientes por

$$c_1=\frac{\left(f\cdot\overline{\phi}_1\right)}{||\phi_1||^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\frac{a_o}{2}$$

$$c_{2n}=\frac{\left(f\cdot\overline{\phi}_{2n}\right)}{||\phi_{2n}||^2}=\frac{1}{||\cos nx||^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx=a_n$$

$$c_{2n+1}=\frac{\left(f\cdot\overline{\phi}_{2n+1}\right)}{||\phi_{2n+1}||^2}=\frac{1}{||\sin nx||^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx=b_n.$$

A série

$$\sum_n |c_n|^2||\phi_n||^2$$

é da forma

$$\sum_n\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

que, sendo convergente, implica que $a_n\to 0$ e $b_n\to 0$.

É possível demonstrar que, *para que* $a_n,b_n\to 0$ $(n\to\infty)$ *é suficiente que* $f(x)$ *seja absolutamente integrável.*

Teorema: *se* $f(x)$ *satisfizer as seguintes condições*

1. *for injectiva;*
2. *for limitada em* $[a,b]$;
3. *tiver um número finito de máximos e mínimos*;

4. *e tiver um número finito de descontinuidades de primeira espécie (quando existem limites finitos da função à esquerda e à direita do ponto da descontinuidade).*

Então a série trigonométrica de Fourier converge para a seguinte quantidade

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

As condições anteriores, que se designam por *condições de Dirichlet*, são condições suficientes de convergência.

Nos intervalos em que a função é contínua, a convergência da série é uniforme. Se $f(x)$ for contínua em todo o intervalo, a série trigonométrica de Fourier converge uniformemente em todo o intervalo.

Como consequência do teorema anterior, resulta que o conjunto das funções $\sin nx$, $\cos nx$ é um conjunto completo para as funções que satisfazem as condições de Dirichlet, isto é

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{a_0^2}{4}2\pi+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

ou

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

que é a *relação de Parseval* neste caso.

Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $[-\pi,\pi]$, se $f(x)$ satisfizer as condições de Dirichlet, a série trigonométrica de Fourier converge para $\frac{1}{2}\left[f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)\right]$. Mas, o que é que acontece fora do intervalo $[-\pi,\pi]$? A série trigonométrica de Fourier converge para uma função periódica que é a repetição de $f(x)$. Se $f(x)$ for periódica de período 2π, a série trigonométrica de Fourier representa essa função em todo o eixo real. O termo $a_1\cos x+b_1\sin x$ designamo-lo por fundamental, o termo $a_n\cos x+b_n\sin nx$, harmónica de ordem n.

14.4. **A Série dos recíprocos dos quadrados perfeitos $\zeta(2)=\pi^2/6$.** A série $\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ foi somada, pela primeira vez, por Euler:

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Uma forma de justificar esta fórmula recorre à análise de Fourier. Há vários métodos, mesmo mantendo-nos nós sempre dentro da análise de Fourier. Por exemplo, um deles, é o seguinte [14, p.717]:

Começamos por determinar a série de Fourier da função $f(x)=\frac{\pi^2}{4}$ com $-\pi\le x\le\pi$. Se repararmos que a função é par, basta-nos determinar o coeficiente a_n, visto que o b_n é nulo:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi^2}{4}\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi^2}{4} \sin nx \, dx$$

Nota: A teoria das séries de Fourier diz-nos que uma função f da variável real x definida no intervalo $[a, b]$, e limitada nesse intervalo, admite um desenvolvimento em série trigonométrica de Fourier da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

em que os chamados coeficientes de Fourier são respectivamente os integrais a_n e b_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Para $n = 0$ vem $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$obtemos

$$\int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n$$

donde

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx + 0 \times \sin nx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

Fazendo agora $x = 0$, como $f(0) = 0$, temos então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n \times 0 \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

e assim determinamos

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$

Fazendo agora $x = \pi$, como

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{4},$$

temos então

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n\pi \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} (-1)^n \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Donde, finalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \blacksquare$$

A derivação da fórmula

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

não foi necessária para a demonstração do valor de $\zeta(2)$.

14.5. **Problemas. Problema 1** - Mostre que o sistema de funções $\sin nx$, em que $n = 1, 2, 3, \ldots$ é ortogonal no intervalo $[0, \pi]$ e determine a respectiva norma.

Resolução:

Num *sistema ortogonal*:

$$\int_a^b \phi_n \overline{\phi}_m \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ > 0 & n = m \end{cases}$$

A sua *norma* é dada por

$$\int_a^b |\phi_n|^2 \, dx = ||\phi_n||^2 > 0$$

Como fórmulas a aplicar, temos as seguintes trigonométricas

$$\begin{aligned}
\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\
\sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \qquad (a = b)
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\sin a \sin b &= \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad (a = b)
\end{aligned}$$

Ora, como para $n \neq m$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin nx\ \sin mx\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n-m)x - \cos(n+m)x\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

e para $n = m$

$$||\sin nx||^2 = \int_0^\pi \sin^2 nx\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 - \cos 2a\ dx = \frac{\pi}{2}$$

o sistema é efectivamente ortogonal e a sua norma

$$||\sin nx|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Problema 2 - Considere o sistema de funções $\cos n\pi\frac{x}{l}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

1. Mostre que o sistema é ortogonal no intervalo $[0, l]$.

2. Deduza a expressão dos coeficientes da série de Fourier associados à função $f(x)$ definida naquele intervalo.

3. Calcule o valor dos coeficientes de Fourier para $f(x) = \frac{x}{l}$

Soluções:

1.

$$\int_0^l \cos n\pi\frac{x}{l}\cos m\pi\frac{x}{l}\ dx = \begin{cases} \frac{l}{2} & n = m \neq 0 \\ l & n = m = 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\pi\frac{x}{l}\ dx \\ c_0 &= \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\ dx \end{aligned}$$

3.

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

Nota adicional: nestas condições

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right) \\ \frac{x}{t} &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Para $x = 0$, vem

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Problema 3 - Verifique que o sistema de funções $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ não é completo no intervalo $[a, b]$.

Resolução

Não é possível definir funções ímpares à custa da soma dos cosenos.

- Função par: $f(x) = f(-x)$
- Função ímpar: $f(x) = -f(-x)$

Para que o sistema de funções $\phi_n(x)$ seja completo é necessário que

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 .$$

Considerando uma função ímpar $I(x)$ não identicamente nula em $[a, b]$, verifica-se que os coeficientes da série de Fourier associada a $I(x)$ são todos nulos:

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} I(x) \cos nx \, dx}{||\phi_n||^2} = 0$$

$I(x) \cos nx$ é o produto de uma função ímpar com uma função par e, portanto, este produto é uma função par. Dado o intervalo de integração, o integral do numerador é nulo. Nestas condições o integral $\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$, que é maior do que zero, é com certeza maior do que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2$, que é igual a zero. ◀

Problema 4 - Mostre que se um sistema de funções $\phi_n(x)$ é ortogonal e completo, uma função contínua $f(x)$ que seja ortogonal a todas as funções do sistema é identicamente nula.

Resolução

Como f é ortogonal,

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2} = 0.$$

Sendo o sistema completo

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2$$

Como f é contínua, por hipótese, para que o seu quadrado possua um integral igual a zero, f tem de ser identicamente nula. ◀

Problema 5

1. Verifique que o sistema de funções $\sin px$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ e $\cos px$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ é ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$ e determine os coeficientes a_p e b_p da série trigonométrica

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

associada a uma função $f(x)$ de quadrado integrável.

2. Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

verifique que aquele sistema é completo em relação à função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ +1 & 0 < x \leq -\pi \end{cases}$$

Resolução

1. Para o sistema de funções $1, \sin px \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$ e $1, \cos px$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos px \; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin px \; dx = 0$$

Se $p \neq q$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \; dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (p-q) x - \cos (p+q) x \; dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (p-q) x}{p-q} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (p+q) x}{p+q} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos qx \; dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (p-q) x + \sin (p+q) x \; dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos (p-q) x}{p-q} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos (p+q) x}{p+q} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Se $p = q$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos px \; dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (p-p)\, x + \sin (p+p)\, x \; dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 0 + \sin (p+p)\, x \; dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 2px}{2p} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado, os quadrados das três normas são

$$\begin{aligned}
||\sin px||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 px \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2px\right) \; dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x\right]_{-\pi}^{\pi} + 0 = \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\cos px||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2px\right) \; dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x\right]_{-\pi}^{\pi} + 0 = \pi
\end{aligned}$$

$$||1|| = \int_{-\pi}^{\pi} \; dx = 2\pi$$

e as próprias normas,

$$||\sin px|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 px \; dx} = \sqrt{\pi}$$

$$||\cos px|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px \; dx} = \sqrt{\pi}$$

$$||1|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \sqrt{2\pi}$$

Verificam-se, portanto, as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \; dx = \delta_{pq}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \; dx = \delta_{pq}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin qx \; dx = \delta_{pq}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \; dx = 0$$

ou na notação das funções ortogonais ϕ_n, em que

$$\phi_0(x) = 1$$
$$\phi_{2n-1}(x) = \cos nx$$
$$\phi_{2n}(x) = \sin nx,$$

estas relações exprimem-se por

$$||\phi_0|| = ||1|| = \sqrt{2\pi}$$
$$\left|\left|\phi_{2n-1}\right|\right| = ||\cos nx|| = \sqrt{\pi}$$
$$||\phi_{2n}|| = ||\sin nx|| = \sqrt{\pi}.$$

A partir das relações a seguir indicadas entre os coeficientes c_n e a_n, b_n podemos calcular o valor destes últimos pela fórmula geral

$$c_n = \frac{\left(f \cdot \overline{\phi}_n\right)}{||\phi_n||^2}.$$

Como os coeficientes c_n são dados por

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$
$$c_{2n-1} = a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx$$
$$c_{2n} = b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ dx$$

os coeficientes a_n, b_n são então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ dx$$

2. Para a função f

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ +1 & 0 < x \leq -\pi \end{cases}$$

tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 ||\phi_n||^2$$

e

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -1\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1\ dx = 0$$

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos px\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos px\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[-\sin px\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[\sin px\right]_{0}^{\pi} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

A interpretação para este valor nulo do coeficiente a_p é que sendo f ímpar a função não precisa dos cosenos, que são funções pares. Quanto ao coeficiente b_p tem-se

$$\begin{aligned} b_p &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin px\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin px\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[\cos px\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[\cos px\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\right] - \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\left[(-1)^p - 1\right] \end{aligned}$$

pelo que

$$b_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ par} \\ \dfrac{4}{p\pi} & \text{se } p \text{ ímpar} \end{cases}$$

O desenvolvimento em série de Fourier da função f é então

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{\pi}\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{4}{\pi}\frac{1}{5}\sin 5x + \cdots .$$

O sistema é completo porque

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \, ||\phi_n||^2 &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 ||1|| + a_1^2 \, ||\cos x||^2 + b_1^2 \, ||\sin x||^2 + \cdots \\ &= \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2\pi. \end{aligned}$$ ◀

Problema 6 - Calcule os coeficientes da série trigonométrica de Fourier associada a cada uma das funções indicadas

1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

3.

$$f(x)=\begin{cases} -mx & -\pi\leq x<0 \\ +mx & 0\leq x\leq -\pi \end{cases}$$

4.

$$f(x)=mx \qquad 0<x\leq 2\pi$$

Respostas

1.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\ dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\ dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\ dx=0$$

2.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\ dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\ dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\ dx=\frac{1}{n\pi}\left(-\cos n\pi+1\right)$$

3.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\ dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\ dx=-\frac{2}{\pi}\frac{m}{n^2}+\frac{2}{\pi}\frac{m\cos n\pi}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\ dx=0$$

4.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\ dx=2m\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\ dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\ dx=-\frac{2m}{n}$$

Problema 7 - Série de Fourier da Onda Quadrada

Faça, para a função

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1 & \text{se } -\pi/2\leq x\leq\pi/2 \\ 0 & \text{se } \qquad |x|>\pi/2 \end{cases}$$

do problema 6.1, a representação gráfica da soma parcial da respectiva série para um número crescente de harmónicas.

Resolução

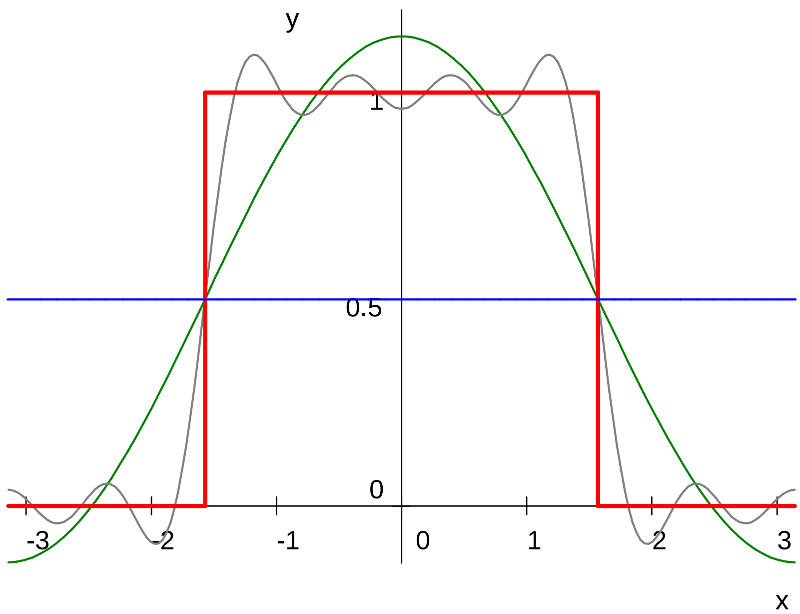
$$f(x) \sim \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{\pi}\frac{1}{5}\cos 5x-\cdots+\frac{2}{(2m+1)\pi}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}\cos(2m+1)+\cdots$$

Primeiras somas parciais da série de Fourier representativa da função $f(x)$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{2}{3\pi}\cos 3x+\frac{2}{5\pi}\cos 5x-\frac{2}{7\pi}\cos 7x$$

A seguir representa-se o gráfico da função $f(x)$ – onda quadrada (a vermelho) no intervalo $[-\pi,\pi]$ – e as somas parciais dos cinco primeiros termos da sua série de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$



Onda quadrada (a vermelho) no intervalo $[-\pi,\pi]$ – e as somas parciais

Em virtude de $f(x)$ ser par $b_n=0$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

Os coeficientes a_n são

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dx = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}$$
$$a_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 3x \, dx = -\frac{2}{3\pi}$$
$$a_5 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 5x \, dx = -\frac{2}{5\pi}$$
$$a_7 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 7x \, dx = -\frac{2}{7\pi}$$
$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{2n} = 0$$

Valor médio
$$\frac{1}{2}$$
Fundamental
$$\frac{2}{\pi} \cos x$$
3^a harmónica
$$-\frac{2}{3\pi} \cos 3x$$
5^a harmónica
$$\frac{2}{5\pi} \cos 5x$$
7^a harmónica
$$-\frac{2}{7\pi} \cos 7x$$

NOTA: a série de Fourier nos dois pontos de descontinuidade da função passa a meio do salto dado, isto é, neste caso $1/2$.

Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$, se $f(x)$ satisfizer as condições de Dirichlet, a série trigonométrica de Fourier converge para $[f(x^+) + f(x^-)]/2$. Mas, o que é que acontece fora do intervalo $[-\pi, \pi]$? A série trigonométrica de Fourier converge para uma função periódica que é a repetição de $f(x)$. Se $f(x)$ for periódica de período 2π, a série trigonométrica de Fourier representa essa função em todo o eixo real. O termo $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ designamo-lo por fundamental, o termo $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, harmónica de ordem n.

Algumas propriedades dos coeficientes de Fourier

(1) Se $f(x)$ for par: $f(x) = f(-x)$, $b_n = 0$
(2) Se $f(x)$ for ímpar: $f(x) = -f(-x)$, $a_n = 0$
(3) Se $f(x)$ tiver duas alternância, sendo uma a imagem num espelho da outra: $f(x) = -f(x + \pi)$, $a_n = b_n = 0$, para n par
(4) Se $f(x)$ for periódica de período π: $f(x) = f(x + \pi)$, $a_n = b_n = 0$, para n ímpar.

Problema 8

Demonstre que qualquer função $f(x)$ definida no intervalo $[0,\pi]$ e satisfazendo as condições de Dirichlet neste intervalo é representável pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

para $x \in [0,\pi]$, que esta série converge para

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$$

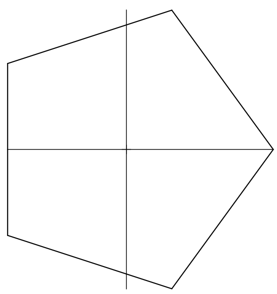
e escreva a expressão dos coeficientes c_n.

Resposta

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

15. Geometria

15.1. **Pentágono e Círculo.** Determine a relação entre a área de um pentágono regular e a do círculo circunscrito.



Resolução

A área de um polígono regular de n lados, de lado l e apótema a é dada por

$$A = \frac{n \times l}{2} \times a,$$

pelo que, no caso do pentágono vem

$$A = \frac{5l}{2} \times a.$$

Se r for o raio do círculo circunscrito e o vértice mais à direita do pentágono for o ponto de coordenadas $(r,0)$, os outros vértices serão os pontos

$(r\cos\dfrac{2\pi}{5}, r\sin\dfrac{2\pi}{5}), (r\cos\dfrac{4\pi}{5}, r\sin\dfrac{4\pi}{5}), (r\cos\dfrac{6\pi}{5}, r\sin\dfrac{6\pi}{5}), (r\cos\dfrac{8\pi}{5}, r\sin\dfrac{8\pi}{5}).$

O apótema a será igual à distância entre $(0,0)$ e o lado vertical do pentágono:

$$a = -r \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = r \times \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = r \times \cos\left(\frac{\pi}{5}\right);$$

e o lado l igual à distância entre dois vértices, por exemplo, $(r\cos\frac{2\pi}{5}, r\sin\frac{2\pi}{5})$ e $(r,0)$:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\left(r \times \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - r\right)^2 + \left(r \times \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2} \\ &= r\sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2} \\ &= r\sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \\ &= r\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}. \end{aligned}$$

isto é

$$l = r\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$

Logo

$$\begin{aligned} A &= \frac{5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} l^2 \\ &= \frac{5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} \left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) r^2 \\ &= \frac{5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}{2} r^2 \end{aligned}$$

ou seja

$$A = \frac{5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}{2} r^2 \tag{15.1}$$

A relação entre as áreas pedidas é pois

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}{2\pi} \approx 75,68\%. \tag{15.2}$$

15.2. **Euler e os cinco sólidos platónicos.** A equação que relaciona o número de faces F, vértices V e arestas A de um poliedro

$$F + V = A + 2, \tag{15.3}$$

aplicada ao cubo ($F = 6$ faces, $V = 8$ vértices, $A = 12$ arestas), traduz-se na igualdade

$$6 + 8 = 12 + 2$$

e, aplicada ao tetraedro, que é uma pirâmide equilátera ($F = 4$ faces , $V = 4$ vértices, $A = 6$ arestas), em

$$4 + 4 = 6 + 2.$$

Num poliedro regular convexo (um segmento de recta que una quaisquer dois dos seus pontos não sai para fora do poliedro), em que cada face tem n lados iguais, se multiplicar o número de faces por estes n lados, *conto as arestas duas vezes*. Porquê? Porque cada aresta é a intersecção de duas faces adjacentes. No caso do cubo, em que as faces são quadrados ($n = 4$) isto traduz-se em:

$$6 \times 4 = 2 \times 12.$$

Para o tetraedro, cujas faces são triângulos equiláteros ($n = 3$ lados), pelo mesmo motivo, se multiplicar o número de faces por estes 3 lados, obtenho

$$4 \times 3 = 2 \times 6.$$

No caso geral de um poliedro regular convexo, em que cada face tem n lados iguais, devido à dupla contagem será então:

$$nF = 2A \Leftrightarrow F = \frac{2A}{n}.$$

Voltando ao cubo, em que cada vértice é o ponto de encontro de $m = 3$ arestas, se multiplicar agora o número de vértices por estas 3 arestas, obtenho o dobro do número de arestas, porque também *estou a contar cada aresta duas vezes*, em virtude de cada aresta unir dois vértives:

$$8 \times 3 = 2 \times 12.$$

Fazendo o mesmo para o tetraedro, $m = 3$, obtenho, pelo mesmo motivo

$$4 \times 3 = 2 \times 6.$$

O caso geral, em que cada vértice de um poliedro regular convexo é o ponto de encontro de m arestas, traduz-se em

$$mV = 2A \Leftrightarrow V = \frac{2A}{m}.$$

Assim, um poliedro regular convexo verifica a dupla igualdade

$$nF = mV = 2A, \tag{15.4}$$

em que n é o número inteiro de lados de cada face poligonal e m o número inteiro de arestas que se intersectam em cada vértice, pelo que a equação (15.3) é equivalente a

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} = A + 2$$

ou a

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}. \tag{15.5}$$

Esta equação corresponde, no caso particular do cubo a

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

e no do tetraedro a

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.$$

Mas há duas restrições aos possíveis valores inteiros de m e n: uma, em virtude do número de arestas ser positivo, é

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n + 2m > mn \tag{15.6}$$

e a outra, porque o poliedro é um sólido tridimensional

$$m \geq 3. \tag{15.7}$$

O número de lados n de cada face define a sua forma poligonal: para $n = 3$ é o triângulo equilátero, $n = 4$, o quadrado, $n = 5$, o pentágono regular. Será que num poliedro regular convexo n poderá ser igual a 6? Vamos ver que não.

Para $m = 3$, a equação (15.5) assume o valor particular

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6},$$

e, pela restrição (15.6)

$$2n + 6 > 3n \Leftrightarrow n < 6$$

conclui-se que $3 \leq n \leq 5$. Os dois casos vistos acima são o *tetraedro*, que corresponde a $n = 3$ e o *cubo*, a $n = 4$. Para $n = 5$, vem

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

donde $A = 30$, $V = 60/3 = 20$ e $F = 32 - 20 = 12$. Este poliedro regular com 12 faces é o conhecido *dodecaedro*.

Para $m = 4$, a mesma equação (15.5) passa a ser

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{4}$$

e agora a restrição (15.6),

$$2n + 8 > 4n \Leftrightarrow n < 4,$$

isto é, $n = 3$. O número de arestas, vértices e faces são, respectivamente, $A = 12$, $V = 24/4 = 6$ e $F = 14 - 6 = 8$. É o *octaedro*, com oito faces que são triângulos equiláteros.

Para $m = 5$, (15.5) é a equação

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{5} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} - \frac{3}{10}$$

e a condição (15.6)

$$2n + 10 > 5n \Leftrightarrow n < \frac{10}{3} < 4$$

logo, é também $n = 3$. O número de arestas, vértices e faces são, respectivamente, $A = 30, V = 60/5 = 12$ e $F = 32 - 12 = 20$. É o *icosaedro*, com vinte faces que são triângulos equiláteros.

Para $m \geq 6$, a primeira forma de (15.6)

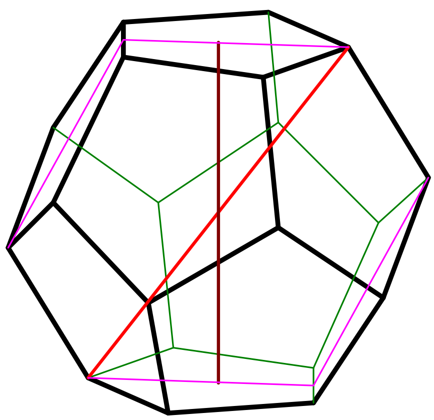
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

permite estabelecer

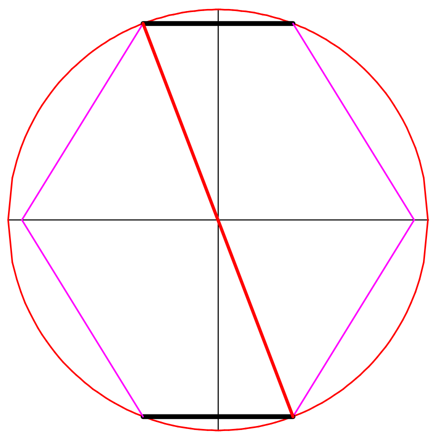
$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n < 3,$$

o que contraria a restrição (15.7). Isto prova que $3 \leq n \leq 5$ e que só há os cinco sólidos platónicos atrás referidos. ◀

15.3. **Dodecaedro.** Determine o lado l de cada um dos doze pentágonos regulares deste sólido platónico, sabendo que dois vértices simétricos em relação ao centro do dodecaedro, distam entre si d metros.



Imaginemos que seccionamos o dodecaedro por um plano vertical que corta ao meio quatro faces opostas, duas a duas: a de cima e a de baixo, e duas adjacentes, a uma e a outra, e que passa por duas arestas simétricas, como se vê na figura. A seguir representa-se este corte do dodecaedro numa outra figura que foi rodada para que as duas arestas ficassem na horizontal.



A preto, arestas; a magenta, eixos das faces

Nesta figura a distância entre o centro e o meio da aresta é o raio inscrito r_i e a distância entre o centro e um vértice é o raio circunscrito R. O raio da circunferência circunscrita a cada face continuamos a chamar-lhe r.

Vamos ver que a relação pedida é

$$\frac{l}{d}=\frac{2}{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\approx 35.68\%, \tag{15.8}$$

a que corresponde o raio da esfera circunscrita $R=d/2$

$$R=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)l,$$

ou seja

$$d=2R=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)l$$

e

$$\frac{d}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)=\sqrt{3}\varphi=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right),$$

em que φ é o número de ouro

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Num pentágono de lado l e raio circunscrito r o apótema a vale

$$a = r \times \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = r \times \left(\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\right)$$

em virtude de

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} = \frac{\varphi}{2}.$$

O lado l em função de r é dado por

$$l = r\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} r$$

porque

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$$

Por isso, vem

$$\frac{a}{l} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$r = \frac{l}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}$$

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{a+r}{l} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a+r &= \frac{l}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) l}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}} \\ &= \left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}\right) l \end{aligned}$$

Na figura r_i é a distância entre o centro do dodecaedro e o ponto médio de cada aresta, o chamado raio inscrito, e a distância entre os vértice $(l/2, r_i)$ e $(r_i, 0)$ é igual a $a + r$:

$$(r+a)^2 = \left(r_i - \frac{l}{2}\right)^2 + r_i^2$$

Pelo teorema de Pitágoras

$$r_i^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$$

Vamos verificar que

$$R = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) l \tag{15.9}$$

é solução, ou seja

$$r_i = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) l\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
(r+a)^2 &= \left(r_i - \frac{l}{2}\right)^2 + r_i^2 \\
&= \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{l}{2}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\
&= \left(l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) l\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Substituindo o primeiro membro, vem

$$\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}\right)^2 l^2$$

$$= \left(l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) l\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

ou

$$\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

De facto, como

$$\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}\right)^2=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{4}$$

e

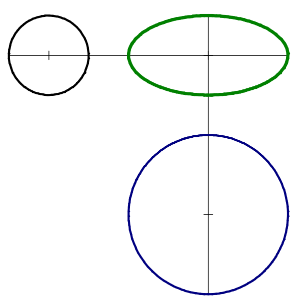
$$\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{4},$$

fica justificada a solução atrás referida.

15.4. **Construção da elipse a partir de duas circunferências.** Considere a seguinte elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Suponhamos que $a > b$. Esta elipse, representada a seguir centrada na origem, resulta da composição de duas circunferências, uma de diâmetro igual ao eixo menor da elipse e outra de diâmetro igual ao seu eixo maior. O eixo da circunferência menor é coincidente com o eixo dos x e o da maior com o dos y. Se $a < b$ a elipse não estaria "deitada" e as circunferências menor e maior trocariam de posição entre si.



Eixos: x, horizontal; y, vertical

Construção da elipse (a verde): os pontos da elipse encontram-se no cruzamento dos segmentos de recta paralelos a x (horizontais) que passam por um dado ponto da circunferência a preto, da esquerda , com os segmentos de recta paralelos a y (verticais) que passam pelo ponto correspondente da circunferência azul, por baixo da elipse. Imagine que começa em ambas as circunferências nos pontos situados mais à direita e que vai rodando no sentido contrário aos ponteiros do relógio a uma velocidade angular constante em ambas. Depois de ter regressado a cada um desses pontos nas duas circunferências, desenha, por este processo, a elipse, no sentido também contrário aos ponteiros do relógio.

15.5. **Cubo de dimensão n, n-cubo ou hipercubo.** O cubo de dimensão n, hipercubo ou n-cubo obtém-se do de dimensão $n-1$ deslocando-o numa direcção perpendicular ao hiperplano que contém o $n-1$-cubo de uma distância igual a 1, e unindo nesse processo os vértices dos dois $n-1$-cubos inicial e final por arestas.

Por exemplo, a partir do cubo tridimensional (de aresta unitária), cujos vértices, escritos numa sequência de três bits (*bitstring*) são

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 \text{ e } 111$$

podemos obter o quadridimensional introduzindo uma quarta dimensão. Este cubo tem 16 vértices, e que são, enumerando-os:

$$\begin{gathered}0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,\\ 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 \text{ e } 1111.\end{gathered}$$

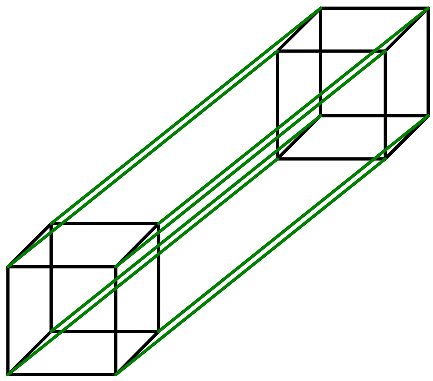
Do cubo tridimensional passamos ao bidimensional (o 2-cubo ou quadrado) retirando-lhe uma das dimensões. Se for a terceira (correspondente ao bit da esquerda) ficamos com os vértices

$$00, 01, 10 \text{ e } 11.$$

Deste retirando-lhe mais uma dimensão ficamos com o 1-cubo (ou segmento), cujos vértices são o

$$0 \text{ e } 1.$$

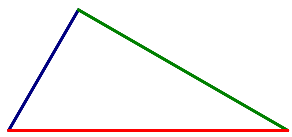
Visualmente, o cubo de dimensão 4 pode representar-se na folha de papel (no ecrã do computador), por exemplo, por



Uma representação do cubo de dimensão 4

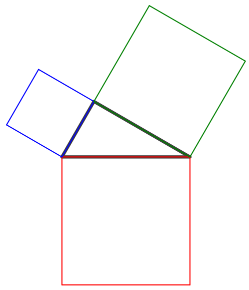
Claro que este cubo quadridimensional não existe no espaço euclidiano. É um grafo que pode ser redesenhado e ficar numa forma que lhe seja equivalente.

15.6. **Teorema de Pitágoras.** 1. Triângulo rectângulo: na figura a seguir o ângulo interno entre os lados a azul e a verde é recto



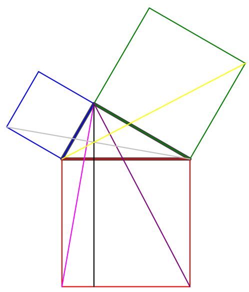
$c =$hipotenusa $a =$ cateto azul $b =$ cateto verde

2. **Teorema**: $c^2 = a^2 + b^2$. A área do quadrado vermelho (sobre o lado c) é igual à soma das áreas dos quadrados azul (sobre o lado a) e verde (sobre o lado b)



$$c^2 = a^2 + b^2$$

3. **Demonstração de Euclides**: construção auxiliar usada por Euclides (com omissão das letras identificativas dos vértices e com linhas coloridas em vez de a preto) na Proposição 47 do livro I dos Elementos [8]



Proposição 47 do livro I dos Elementos de Euclides

Exercício: Determine o comprimento $a = c$ de cada um dos lados iguais de um triângulo isósceles, de base b e área A.

Resolução: Seja b a base. A altura une o ponto da base equidistante de cada vértice situado nos extremos; a distância a cada um é igual a $\frac{b}{2}$. Esta altura divide o triângulo isósceles de lados a, b, c em dois triângulos rectângulos simétricos: o da esquerda de lados $a, \frac{b}{2}$ e h e o da direita $c, \frac{b}{2}$ e h, cada um com uma área igual a $A/2$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado, por exemplo, ao da esquerda sabemos que

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Como a área do triângulo de lados a, b, c é $A = \dfrac{b \times h}{2}$, $h = \dfrac{2A}{b}$, podemos exprimir a em função de A, b :

$$\frac{4h^2 + b^2}{2} = \sqrt{\frac{4A^2}{b^2} + \frac{b^2}{4}}$$

como é pedido.

16. Problema Putnam de hoje, HMD, 1 Março 2008 / Putnam problem of the day, HMD, March 1, 2008

16.1. Versão portuguesa de Problema Putnam de hoje, HMD, 1 Março 2008. No site do departamento do Harvard's Math Department

[http://www.math.harvard.edu/putnam/index.html]

aparece hoje, 1-1-2008, o seguinte enunciado (Putnam problem of the day):

"Evaluate

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cdots}}} \tag{16.1}$$

Express your answer in the form $\dfrac{a + b\sqrt{c}}{d}$, where a, b, c, d are integers."

Resolução:

Começo por calcular o radicando, notando que a fracção contínua

$$x = \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cdots}}$$

verifica

$$x = \frac{1}{2207 - x}$$

pelo que, como $\dfrac{1}{2}\left(2207 + \sqrt{2207^2 - 4}\right) \approx 2207$, só poderá ser

$$x = \frac{2207 - \sqrt{2207^2 - 4}}{2}$$

e, após alguns cálculos

$$2207 - x = \frac{2207 + 987\sqrt{5}}{2};$$

por este motivo

$$\sqrt[8]{2207-\cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}}=\sqrt[8]{\frac{2207+987\sqrt{5}}{2}}.$$

Para que

$$\sqrt[8]{\frac{2207+987\sqrt{5}}{2}}=\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{d^8}{2}\left(2207+987\sqrt{5}\right)=\left(a+b\sqrt{c}\right)^8,$$

com a,b,c inteiros, é necessário que $d^8/2$ seja inteiro, pelo que d deve ser par. Vou admitir que $d=2$; por outro lado c deverá ser igual a 5. Então,

$$2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)=126\,336\sqrt{5}+282\,496=\left(a+b\sqrt{5}\right)^8$$

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{5} &= \sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)} \\ a &= \sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-b\sqrt{5} \end{aligned}$$

Como, para $b=2$

$$a=\sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-2\sqrt{5}<1$$

excluo esta possibilidade. Resta $b=1$

$$a=\sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-\sqrt{5}\approx 5.\,236\,1-2.\,236\,1=3$$

Vou confirmar

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8=126\,336\sqrt{5}+282\,496.$$

A solução pedida a que cheguei foi

$$\sqrt[8]{2207-\cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \tag{16.2}$$

Nota: o cálculo de

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8=126\,336\sqrt{5}+282\,496$$

pode ser feito à mão da seguinte forma:

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^2 = 6\sqrt{5}+14$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^4 = \left(6\sqrt{5}+14\right)^2 = 168\sqrt{5}+376$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8 = \left(168\sqrt{5}+376\right)^2 = 126\,336\sqrt{5}+282\,496.$$

16.2. **English version of the Putnam problem of the day, HMD, March 1, 2008.**

On March 1, 2008, the Putnam problem of the day displayed on the Harvard's Math Department site
[`http://www.math.harvard.edu/putnam/index.html`]
was stated as follows:

"Evaluate

$$\sqrt[8]{2207-\cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}} \tag{16.3}$$

Express your answer in the form $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$, where a, b, c, d are integers."

Solution:

To evaluate the radicand I start by seeing that the continued fraction

$$x = \cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}$$

satisfies

$$x = \frac{1}{2207-x}.$$

Thus, since $\dfrac{1}{2}\left(2207+\sqrt{2207^2-4}\right) \approx 2207$, the only solution left is

$$x = \frac{2207-\sqrt{2207^2-4}}{2}.$$

A few algebraic manipulations give

$$2207 - x = \frac{2207+987\sqrt{5}}{2};$$

hence

$$\sqrt[8]{2207-\cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}}=\sqrt[8]{\frac{2207+987\sqrt{5}}{2}}.$$

In order to have

$$\sqrt[8]{\frac{2207+987\sqrt{5}}{2}}=\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$$

or equivalently,

$$\frac{d^8}{2}\left(2207+987\sqrt{5}\right)=\left(a+b\sqrt{c}\right)^8,$$

with a,b,c integers, $d^8/2$ should also be an integer; therefore d should be even. I assume that $d=2$; On the other hand c should be 5. Thus,

$$2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)=126\,336\sqrt{5}+282\,496=\left(a+b\sqrt{5}\right)^8$$

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{5} &= \sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)} \\ a &= \sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-b\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Since, for $b=2$

$$a=\sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-2\sqrt{5}<1,$$

this possibility is excluded. It remains $b=1$

$$a=\sqrt[8]{2^7\left(2207+987\sqrt{5}\right)}-\sqrt{5}\approx 5.\,236\,1-2.\,236\,1=3$$

Now I confirm

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8=126\,336\sqrt{5}+282\,496.$$

So, the solution I found was

$$\sqrt[8]{2207-\cfrac{1}{2207-\cfrac{1}{2207-\cdots}}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{16.4}$$

Remark: the calculation of

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8=126\,336\sqrt{5}+282\,496$$

can be done by hand as follows

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^2 = 6\sqrt{5}+14$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^4 = \left(6\sqrt{5}+14\right)^2 = 168\sqrt{5}+376$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^8 = \left(168\sqrt{5}+376\right)^2 = 126\,336\sqrt{5}+282\,496.$$

17. Period of a decimal expansion/Período de uma dízima

17.1. My solution to the Problem Of the Week-9 [Todd and Vishal's blog]: Period of a decimal expansion. Find the length of the period of the repeating decimal representation of

$$\frac{1}{65537}.$$

http://topologicalmusings.wordpress.com/2008/08/23/pow-9-period-of-a-decimal-expansion/

My Solution:

The repeating decimal representation of the number $1/65537$ is

$$\frac{1}{65537} = 0.\overbrace{\overline{000\,015\,258\,556\ldots cba}}^{65536 \text{ digits}} \quad .$$

Let p be a prime number. The period of the repeating decimal of $1/p$ is equal to the order of 10 $(\operatorname{mod} p)$ and is either $p-1$ or a divisor of $p-1$. Since 65537 is a prime number, the period of the repeating decimal of $1/65537$ is either 65536 or a divisor of $65536 = 2^{16}$. These divisors are

$$k = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{16}.$$

By the definition of the order of 10 $(\operatorname{mod} 65537)$, I have to found the smallest of these $k = 2^m$ such that

$$10^k \equiv 1 \,(\operatorname{mod} 65537)\,,$$

which means $\left(10^{(2^m)}-1\right)/65537$ should be an integer.

Since

$$10-1 < 10^2-1 < 10^4-1 < 65537.$$

the remaining cases are $m = 3, 4, \ldots, 16$. From these I have checked in PARI that only

$$\frac{10^{65536}-1}{65537} = 669179\ldots526527$$

is an integer. For instance

$$\frac{10^{16}-1}{65537} = \frac{999999999999999}{65537} \notin \mathbb{Z}.$$

Conclusion: the length of the period of the repeating decimal representation of $\dfrac{1}{65537}$ is 65536.

17.2. **Versão portuguesa da minha resolução do «Problem Of the Week-9 [Todd and Vishal's blog]»: Período de uma dízima.** A resolução do Problema a seguir enunciado foi aceite.

Determine o comprimento do período da dízima [infinita] de

$$\frac{1}{65537}.$$

http://topologicalmusings.wordpress.com/2008/08/23/pow-9-period-of-a-decimal-expansion/

Eis a minha **Resolução** traduzida:

A dízima que representa o número $1/65537$ é

$$\frac{1}{65537}=0.\overbrace{000\,015\,258\,556\ldots cba}^{65536\text{ dígitos}}\quad .$$

Seja p um número primo. O período da dízima decimal de $1/p$ é igual à ordem de 10 $(\operatorname{mod} p)$ e é ou $p-1$ ou um seu divisor. Uma vez que 65537 é um número primo, o período da representação em dízima decimal periódica de $1/65537$ é, pois, ou 65536 ou um divisor de $65536=2^{16}$. Estes divisores são

$$k=2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots,2^{16}.$$

Por definição de ordem de 10 $(\operatorname{mod} 65537)$, tenho de determinar o menor destes $k=2^m$ tal que

$$10^k\equiv 1\,(\operatorname{mod} 65537)\,,$$

o que quer dizer que $\left(10^{(2^m)}-1\right)/65537$ terá de ser inteiro.

Dado que

$$10-1<10^2-1<10^4-1<65537,$$

os restantes casos são os de $m=3,4,\ldots,16$. Destes verifiquei em PARI que apenas

$$\frac{10^{65536}-1}{65537}=669179\ldots526527$$

é inteiro. Por exemplo,

$$\frac{10^{16}-1}{65537}=\frac{999999999999999}{65537}\notin\mathbb{Z}.$$

Conclusão: o comprimento do período da dízima que representa $\dfrac{1}{65537}$ é 65536. ◀

18. Congruências e divisibilidade / Congruences and Divisibility

18.1. **A Purdue University Problem of the Week, Problem No. 12 (Spring 2009 Series).** "**Problem**: For how many positive integers $x \leq 10,000$ is $2^x - x^2$ not divisible by 7?

Justify your answer without the use of computers."

`http://www.math.purdue.edu/pow/spring2009/pdf/problem12.pdf`

Here is my *solution* (accepted).

If $a \equiv b \pmod{m}$, then $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Applied to 2^n this property gives in general for $n = 3k + s, 1 \leq s \leq 3, 0 \leq k$

$$2^n \equiv 2^s \pmod{7}, \tag{*}$$

which means that the remainders of the division of 2^n by 7 form a periodic sequence of length 3 starting at $n = 1$

$$\overbrace{2, 4, 1}^{\text{period}}, \overbrace{2, 4, 1}^{\text{3 terms}}, \ldots .$$

As for n^2 since (a) if $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ and (b) if $a \equiv b \pmod{m}$, then $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, we have in general for $n = 7j + r, 1 \leq r \leq 7, 0 \leq j$

$$n^2 \equiv r^2 \pmod{7} \tag{**}$$

which means that the remainders of the division of n^2 by 7 form a periodic sequence of length 7 starting at $n = 1$

$$\overbrace{1, 4, 2, 2, 4, 1, 0}^{\text{period}}, \overbrace{1, 4, 2, 2, 4, 1, 0}^{\text{7 terms}}, \ldots,$$

If $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then $a - c \equiv b - d \pmod{m}$. Let $u_n = 2^n - n^2$. Therefore from (*) and (**) we have

$$u_n \equiv 2^s - r^2 \pmod{7}. \tag{***}$$

The remainders of the division of u_n by 7 form another periodic sequence of length $21 = \text{lcm}(3, 7)$ which starts also at $n = 1$. Four examples of the evaluation of these remainders are presented below.

For $1 \leq n \leq 21$ the following 15 terms are not divisible by 7:

$$u_1, u_3, u_7, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, u_{21}.$$

Hence for $1 \leq n \leq 9996 = 21 \times \left\lfloor \frac{10000}{21} \right\rfloor$, there are $15 \times \left\lfloor \frac{10000}{21} \right\rfloor = 7140$ terms that are not divisible by 7.

From the remaining 4 terms u_{9997} and u_{9999} are not divisible by 7, which gives a total of $7140 + 2 = 7142$ numbers $u_n = 2^n - n^2$ not divisible by 7.

Four *examples* of the evaluation of the remainders:
$u_9 = 2^9 - 9^2$ $(9 = 3 \times 2 + 3, s = 3, 9 = 7 \times 1 + 2, r = 2)$

$$\begin{aligned} 2^9 &\equiv 2^3 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \\ 9^2 &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ u_9 &\equiv 2^3 - 2^2 \mod 7 \equiv -3 \mod 7 \end{aligned}$$

$u_{10} = 2^{10} - 10^2$ $(10 = 3 \times 3 + 1, s = 1, 10 = 7 \times 1 + 3, r = 3)$

$$\begin{aligned} 2^{10} &\equiv 2^1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ 10^2 &\equiv 3^2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ u_{10} &\equiv 2^1 - 3^2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

$u_{9997} = 2^{9997} - 9997^2$ $(9997 = 3 \times 3332 + 1, s = 1, 9997 = 7 \times 1428 + 1, r = 1)$

$$\begin{aligned} 2^{9997} &\equiv 2^1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ 9997^2 &\equiv 1^2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \\ u_{9997} &\equiv 2^{9997} - 9997^2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

$u_{9998} = 2^{9998} - 9998^2$ $(9998 = 3 \times 3332 + 2, s = 2, 9997 = 7 \times 1428 + 2, r = 2)$

$$\begin{aligned} 2^{9998} &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ 9997^2 &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ u_{9998} &\equiv 2^{9998} - 9997^2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned} \qquad \blacktriangleleft$$

18.2. **Tradução portuguesa de um Problema da Purdue University Problem No. 12 (Spring 2009 Series).** Tradução do enunciado do Problema original:

`http://www.math.purdue.edu/pow/spring2009/pdf/problem12.pdf`

« Para quantos inteiros positivos $x \leq 10000$ é que $2^x - x^2$ não é divisível por 7?

Justifique a sua resposta sem utilizar o computador. »

"For how many positive integers $x \leq 10,000$ is $2^x - x^2$ not divisible by 7?

Justify your answer without the use of computers."

Eis a tradução da minha *resolução* (aceite):

Se $a \equiv b \pmod m$, então $a^n \equiv b^n \pmod m$. Esta propriedade aplicada a 2^n dá em geral, para $n = 3k + s, 1 \leq s \leq 3, 0 \leq k$

$$2^n \equiv 2^s \pmod 7, \tag{*}$$

o que significa que os restos da divisão de 2^n por 7 formam uma sucessão periódica de comprimento 3 com início em $n = 1$

$$\overbrace{2, 4, 1}^{\text{período}}, \overbrace{2, 4, 1}^{\text{3 termos}}, \ldots.$$

Quanto a n^2, dado que: a) if $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então $a + c \equiv b + d \pmod m$ e b) se $a \equiv b \pmod m$, então $a^2 \equiv b^2 \pmod m$, temos em geral, para $n = 7j + r, 1 \leq r \leq 7, 0 \leq j$

$$n^2 \equiv r^2 \pmod 7 \qquad (**)$$

o que quer dizer que os restos da divisão de n^2 por 7 formam uma sucessão periódica de comprimento 7 que começa em $n = 1$

$$\overbrace{1, 4, 2, 2, 4, 1, 0}^{\text{período}}, \overbrace{1, 4, 2, 2, 4, 1, 0}^{\text{7 termos}}, \ldots,$$

Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então $a - c \equiv b - d \pmod m$. Seja $u_n = 2^n - n^2$. Em consequência de (*) e (**) obtemos

$$u_n \equiv 2^s - r^2 \mod 7. \qquad (***)$$

Os restos da divisão de u_n por 7 formam outra sucessão periódica de comprimento 21 = mmc $(3, 7)$ que se inicia também em $n = 1$. Apresentamos em baixo quatro exemplos da determinação destes restos.

Para $1 \leq n \leq 21$ os seguintes 15 termos não são divisíveis por 7:

$$u_1, u_3, u_7, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, u_{21}.$$

Assim para $1 \leq n \leq 9996 = 21 \times \left\lfloor \frac{10000}{21} \right\rfloor$, há $15 \times \left\lfloor \frac{10000}{21} \right\rfloor = 7140$ termos que não são divisíveis por 7.

Dos restantes 4 *termos* u_{9997} *e* u_{9999} *não são divisíveis por* 7*, o que dá um total de* $7140 + 2 = 7142$ *números* $u_n = 2^n - n^2$ *não divisíveis por* 7*.*

Quatro *exemplos* do cálculo dos restos:
$u_9 = 2^9 - 9^2$ $(9 = 3 \times 2 + 3, s = 3, 9 = 7 \times 1 + 2, r = 2)$

$$\begin{aligned} 2^9 &\equiv 2^3 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \\ 9^2 &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ u_9 &\equiv 2^3 - 2^2 \mod 7 \equiv -3 \mod 7 \end{aligned}$$

$u_{10} = 2^{10} - 10^2$ $(10 = 3 \times 3 + 1, s = 1, 10 = 7 \times 1 + 3, r = 3)$

$$\begin{aligned} 2^{10} &\equiv 2^1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ 10^2 &\equiv 3^2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ u_{10} &\equiv 2^1 - 3^2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

$u_{9997} = 2^{9997} - 9997^2$ $(9997 = 3 \times 3332 + 1, s = 1, 9997 = 7 \times 1428 + 1, r = 1)$

$$\begin{aligned} 2^{9997} &\equiv 2^1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \\ 9997^2 &\equiv 1^2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \\ u_{9997} &\equiv 2^{9997} - 9997^2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

$u_{9998} = 2^{9998} - 9998^2$ $(9998 = 3 \times 3332 + 2, s = 2, 9997 = 7 \times 1428 + 2, r = 2)$

$$\begin{aligned} 2^{9998} &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ 9997^2 &\equiv 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \\ u_{9998} &\equiv 2^{9998} - 9997^2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$ ◀

19. Exercício: provar que dois elevado a 33 mais três elevado a 33 não é primo

Provar que $2^{33} + 3^{33}$ é um número composto.

[do *Vestibular* da UFPE, 2008]

► Para $n = 1 + 4k$ (com $k = 1, 2, \dots$) as potências 2^n e 3^n terminam (*), respectivamente, em 2 e 3; a sua soma $2^{33} + 3^{33}$ termina por isso em 5. Ora

$$2^{33} + 3^{33} = 2^{1+4\times 8} + 3^{1+4\times 8}$$

e, consequentemente, $2^{33} + 3^{33}$ é divisível por 5, logo não é primo. ◀

(*) Por exemplo: $\mathbf{2^1 = 2}, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \mathbf{2^5 = 32}, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, \mathbf{2^9 = 512}, \dots$

$\mathbf{3^1 = 3}, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, \mathbf{3^5 = 243}, 3^6 = 729, 3^7 = 2187, 3^8 = 6561, \mathbf{3^9 = 19\,683}, \dots$

Método *alternativo*: de uma forma mais rigorosa e aproveitando uma ideia desenvolvida neste artigo pode justificar-se este resultado da seguinte maneira.

Se $a \equiv b \pmod m$, então $a^n \equiv b^n$. Esta propriedade aplicada a 2^n dá em geral, para $n = 4k + s$, $1 \leq s \leq 3$, $0 \leq k$

$$2^n \equiv 2^s \pmod 5 \qquad (*)$$

o que significa que os restos da divisão de 2^n por 5 formam uma sucessão periódica de comprimento 4 com início em $n = 1$

$$\overbrace{2, 4, 3, 1}^{\text{período}}, \overbrace{2, 4, 3, 1}^{\text{4 termos}}, \dots$$

Aplicada a 3^n ($n = 4k + s$,$1 \leq s \leq 3$, $0 \leq k$) dá

$$3^n \equiv 3^s \pmod 5 \qquad (**)$$

o que significa que os restos da divisão de 3^n por 5 formam uma sucessão periódica de comprimento 4 com início $n = 1$

$$\overbrace{3, 4, 2, 1}^{\text{período}}, \overbrace{3, 4, 2, 1}^{\text{4 termos}}, \ldots$$

Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então $a - c \equiv b - d \pmod m$. Em consequência de (*) e (**)

$$2^n + 3^n \equiv 2^s + 3^s \pmod 5 \qquad (***)$$

Os restos da divisão de $2^n + 3^n$por 5 formam outra sucessão periódica de comprimento 4 que se inicia também em $n = 1$

$$\overbrace{0, 3, 0, 2}^{\text{período}}, \overbrace{0, 3, 0, 2}^{\text{4 termos}}, \ldots$$

Logo para n ímpar, $2^n + 3^n$ é divisível por 5, pelo que $2^{33} + 3^{33}$ não é primo. ◄

Ou então calcula-se simplesmente $33 = 4 \times 8 + 1$,$s = 1$ e

$$\begin{aligned} 2^{33} &\equiv 2^1 \pmod 5 \\ 3^{33} &\equiv 3^1 \pmod 5 \end{aligned}$$

donde $2^{33} + 3^{33} \equiv 2^1 + 3^1 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$ visto que

$$5 \equiv 0 \pmod 5.$$

20. Exemplos de cálculo financeiro

20.1. **Base dos logaritmos naturais e juros.** A base e dos logaritmos naturais $\log x = \log_e(x)$ aparece no cálculo financeiro no caso limite em que a taxa de juro é continuamente composta.

Vou começar pelo *caso discreto*.

Admitamos que num determinado contrato se aplica, em cada trimestre, uma taxa de juro i composta (trimestralmente, ou seja, quatro vezes por ano). A taxa nominal i_N é então

$$i_N = 4i,$$

pelo que

$$i = \frac{i_N}{4}.$$

Se o capital investido no início for P, os montantes *futuros* F ao fim dos vários períodos trimestrais serão:

- 1^o. trimestre: $F_1 = P(1 + i)$
- 2^o. trimestre: $F_2 = P(1 + i)^2$
- 3^o. trimestre: $F_3 = P(1 + i)^3$
- $\cdots$

- trimestre $n: F_n = P(1+i)^n = P\left(1+\frac{i_N}{4}\right)^n$.

Se em vez de 4 períodos de capitalização, houver m, passaremos a ter ao fim desses m períodos, o montante

$$F_m = P(1+i)^m = P\left(1+\frac{i_N}{m}\right)^m$$

Por isso

$$F_m - P = P\left[\left(1+\frac{i_N}{m}\right)^m - 1\right]$$

ou

$$\frac{F_m - P}{P} = \left(1+\frac{i_N}{m}\right)^m - 1,$$

o que traduz a taxa efectiva i_E do contrato, ou seja, a relação entre os juros durante um ano e o capital P, conhecido por *principal.*

Exemplos numéricos: Se a taxa nominal do contrato for de 12% ao composta

- semestralmente, a taxa efectiva será $i_E = \left(1+\frac{0,12}{2}\right)^2 - 1 \approx 12,36\%$
- trimestralmente, $i_E = \left(1+\frac{0,12}{4}\right)^4 - 1 \approx 12,55\%$
- mensalmente, $i_E = \left(1+\frac{0,12}{4}\right)^4 - 1 \approx 12,68\%$
- ao dia, $i_E = \left(1+\frac{0,12}{365}\right)^{365} - 1 \approx 12,75\%$

E o que acontece se a taxa for composta em infinitos períodos? É a chamada *composição contínua*. Corresponde, neste exemplo, ao limite de

$$i_E = \left(1+\frac{0,12}{m}\right)^m$$

quando m tende para $+\infty$.

Como é bem sabido do início da Análise,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} i_E &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0,12}{m}\right)^m - 1 = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{0,12}{m}\right)^{m/0,12}\right]^{0,12} - 1\\ &= e^{0,12} - 1 \approx 12,75\%\end{aligned}$$

No caso geral da taxa $i_N = r$ (para simplificar a notação que se segue) será

$$i_E = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^r - 1 = e^r - 1.$$

Em resumo, na composição contínua, a relação entre as taxas de juro nominal r e efectiva $i_{E,m\to\infty}$ é dada por

$$i_{E,m\to\infty} = \lim_{m\to\infty} i_E = e^r - 1.$$

20.2. **Logaritmos nos cálculos financeiros.** Suponha o leitor que pretende determinar a taxa nominal anual que composta mensalmente origina uma taxa efectiva de $19,56\%$. A relação entre a taxa efectiva (i_E) e a nominal (i_N) é dada pela conhecida igualdade

$$i_E = \left(1 + \frac{i_N}{m}\right)^m - 1,$$

em que m é o número de períodos de capitalização.

Numericamente será:

$$\begin{aligned} 0,1956 &= \left(1 + \frac{i_N}{12}\right)^{12} - 1 \\ \ln 1,1956 &= \ln\left(1 + \frac{i_N}{12}\right)^{12} \\ 0.014887 &= 12 \ln\left(1 + \frac{i_N}{12}\right) \end{aligned}$$

Agora calcula-se o anti-logaritmo:

$$e^{0,014887} = 1 + \frac{i_N}{12}$$

e como $e^{0,014887} = 1,014999$,

$$1,014999 = 1 + \frac{i_N}{12}$$

ou

$$\begin{aligned} 0,014999 &= \frac{i_N}{12} \\ 0,0179988 &= i_N \end{aligned}$$

A taxa nominal anual é pois igual a 18%.

Sobre o comportamento de

$$i_E = \left(1 + \frac{i_N}{m}\right)^m - 1$$

quando m tende para infinito, veja a secção anterior.

20.3. **Série uniforme de pagamentos: formação de capital.** Admita agora o leitor que constitui um fundo, fazendo uma sequência de n pagamentos constantes A à taxa de juro i e que pretende saber qual a relação entre o capital F, ao fim dos n períodos, e o valor de A.

O primeiro pagamento rende juros durante $n-1$ períodos. O segundo, durante $n-2$ e, em geral, o do período k, durante $n-k$ períodos. Então, o valor futuro correspondente ao pagamento do período k é

$$F_k = A\left(1+i\right)^{n-k}.$$

Se somarmos todos os valores futuros F_k, para $k = 1, 2, \ldots, n$, atendendo à fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica de razão c e primeiro termo u_1, que é igual a

$$u_1 \frac{c^n - 1}{c - 1},$$

em que, neste caso, $u_1 = A$ (ver a seguir $\sum_{m=1}^{n} A\left(1+i\right)^{m-1}$) e $c = 1+i$, obtém-se

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} A\left(1+i\right)^{n-k} = \sum_{m=1}^{n} A\left(1+i\right)^{m-1} = A\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}.$$

Se exprimirmos A em função de F, virá

$$A = F\frac{i}{\left(1+i\right)^n - 1}.$$

Três condições importantes de aplicação destas fórmulas são: os pagamentos A são uniformes e equidistantes entre si, efectuando-se no final de cada período, e a taxa de juro i permanece inalterada.

Exemplos numéricos: qual a quantia que deve ser depositada anualmente, durante dez anos, numa conta, à taxa de juro de 5%, de modo que o seu saldo venha a ser igual a 10000 unidades monetárias? E durante 20 anos? E se a taxa de juro for de 10%?

Neste caso devemos determinar A, conhecida a taxa de juro $i = 5\%$ e o valor futuro $F = 10000$, para $n = 10$:

$$A = F\frac{i}{\left(1+i\right)^n - 1} = 10000\frac{0,05}{\left(1+0,05\right)^{10} - 1} = 795,05 \text{ unidades monetárias.}$$

Para $n = 20$

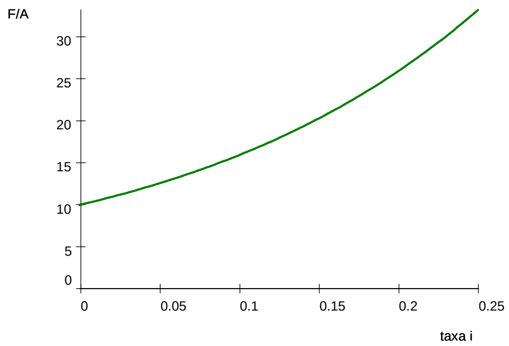
$$A = 10000\frac{0,05}{\left(1+0,05\right)^{20} - 1} = 302,43 \text{ unidades monetárias.}$$

Se $i = 10\%$, tem-se, para dez e 20 anos, respectivamente, $627,45$ e $174,60$ unidades monetárias, claro que muito menos.

Ao fim de n anos, no caso limite em que a taxa de juro é continuamente composta, se a taxa nominal for r, a taxa efectiva, como mostrei na secção 1 é igual a $e^r - 1$, pelo que a relação anterior da formação de capital se traduz em

$$A = F\frac{e^r - 1}{e^{rn} - 1}$$

Por último apresento o gráfico da relação F/A em função da taxa de juro i para $n = 10$ períodos



F/A em função da taxa de juro i, $(n = 10)$

20.4. **Outro exercício de cálculo financeiro: série uniforme e recuperação de capital.** Foram emprestadas 100 000 unidades monetárias à taxa de juro (nominal anual) de 7% capitalizada semestralmente. O reembolso será feito semestralmente, em capital e juros, durante 30 anos.

Qual a parte da dívida que falta pagar ao fim de 10 anos?

No caso geral, teremos de calcular o valor dos pagamentos constantes A dado o valor do capital principal P.

Durante n períodos, neste caso semestrais, são pagos A unidades monetárias em cada. O valor A do período k equivale ao valor presente de $A/(1+i)^k$ unidades monetárias, em que i é a taxa de juro em cada período de capitalização. Se somarmos em k, de 1 a n, obtemos o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A}{(1+i)^k}$$

Como noutros casos anteriores de cálculo financeiro já expostos, deparamo-nos com a soma de uma progressão geométrica, neste caso de razão $c = 1/(1+i)$ e primeiro termo $u_1 = A/(1+i)$:

$$u_1 \frac{c^n - 1}{c - 1} = \frac{A}{1+i} \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Esta soma há-se naturalmente ser igual a P:

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

donde

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Regressando ao exemplo, o reembolso é feito em $n = 60$ semestres, sendo a taxa $i = 7/2\%$ e $P = 100\,000$, pelo que

$$A = 100\,000 \frac{0,035\,(1,035)^{60}}{(1,035)^{60} - 1} = 4009 \text{ unidades monetárias.}$$

O valor do empréstimo ao fim de 20 semestres é

$$100\,000 \times (1 + 0,035)^{20} = 198\,979 \text{ unidades monetárias.}$$

As rendas pagas ao fim de 20 semestres correspondem ao valor futuro F da série de pagamentos semestrais A, no fim do período 20. Como vimos na formação de capital

$$A = F \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

ou

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ou seja, neste caso

$$F = 4009 \times \frac{1.035^n - 1}{0,035} = 113\,373 \text{ unidades monetárias.}$$

A dívida que falta pagar ao fim de 10 anos é então

$$198\,979 - 113\,373 = 85\,605 \text{ unidades monetárias.}$$

21. Problemas lógicos, enigmas e adivinhas

21.1. **Descobrir a moeda falsa.** Texto do desafio "A moeda contrafeita", de António Frazão, do blog

Ferrao.org :

« Imagine o leitor que está perante um conjunto de 27 moedas de ouro e uma balança mecânica de braços iguais. Dispõe apenas deste material.

É-lhe dito:

- Há uma moeda falsa.

- Que número mínimo de operações com a balança será necessário efectuar para se determinar com certeza qual é a moeda falsa? »

Ver meu comentário

[`http://problemasteoremas.wordpress.com/2008/04/20/matematica-de-1%c2%aa-por-um-matematico-de-1%c2%aa/#comment-251`]

Passo a expor um método para conseguir determinar a moeda falsa do conjunto das 27, sem se saber se ela é mais ou menos pesada do que as restantes.

Para facilidade de exposição designo o conjunto das moedas por $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{27}\}$.

Divido este conjunto em três outros, com nove moedas cada, M_I, M_{II} eM_{III}, respectivamente

$$M_I = \{m_1, m_2, \ldots, m_9\}$$
$$M_{II} = \{m_{10}, m_{11}, \ldots, m_{18}\}$$
$$M_{III} = \{m_{19}, m_{20}, \ldots, m_{27}\}.$$

A seguir faço as seguintes pesagens:

Passo 1 - coloco num dos pratos da balança as moedas do conjunto M_I e no outro as do M_{II}. Se a balança ficar em equilíbrio, a moeda falsa pertence ao conjunto M_{III} e prossigo para o passo 5. Senão, para o passo 2.

Passo 2 - substituo as moedas do prato mais elevado pelas de M_{III} e vejo se o pratos se equilibram, o que indicaria que uma das moedas do prato que estava mais elevado era mais leve. Se não houver equilíbrio da balança, vejo qual dos pratos pesa menos: se for o das moedas M_{III}, é porque uma das moedas do outro prato é mais pesada; caso contrário, uma das moedas do outro prato é mais leve.

Passo 3 - das nove moedas que têm peso diferente, escolho seis e coloco três em cada prato. Se a balança ficar equilibrada é porque uma das três restantes é falsa. Senão, a moeda falsa é a do prato mais leve ou mais pesado, conforme se tenha visto no passo 2 que a moeda falsa é mais leve ou mais pesada.

Passo 4 - coloco uma do grupo das falsas em cada prato: se a balança ficar equilibrada a falsa é a que ficou de fora. Caso contário, é a do prato mais leve ou mais pesado, conforme se tenha visto no passo 2 que a moeda falsa é mais leve ou mais pesada. FIM.

Passo 5 - das nove moedas de M_{III}, escolho seis e coloco três em cada prato. Se a balança ficar equilibrada é porque uma das três restantes é falsa. FIM. Senão, prossigo para o passo 8.

Passo 6 - coloco uma do grupo das falsas em cada prato: se a balança ficar equilibrada a falsa é a que ficou de fora. FIM. Se não houver equilíbrio da balança, vejo qual dos pratos pesa menos.

Passo 7 - comparo a moeda do prato que pesa menos com a moeda que ficou de fora: a que pesava menos é falsa se continuar a pesar menos, caso contário é a que está no prato que pesa mais. FIM.

Passo 8 - transfiro duas moedas do prato mais leve para o mais pesado e uma do mais pesado para o mais leve, ficando duas moedas em cada prato. Podem acontecer três situações:

- a balança ficar desequilibrada para o mesmo lado – a moeda falsa é a que não foi mexida; FIM.
- a balança continuar desequilibrada, mas com inversão do sentido do desiquilíbrio – a moeda falsa é a que foi transferida do prato mais pesado; FIM.
- a balançar ficar equilibrada – faço uma última pesagem no passo 9.

Passo 9 - escolho uma das duas moedas que não foram transferidas de prato e comparo o seu peso com qualquer das moedas de M_I ou M_{II}, que sei não ser falsa. Podem acontecer dois casos:

- a balança ficar equilibrada – a moeda falsa é a que não foi pesada; FIM.
- a balança ficar desequilibrada – a moeda falsa é a que está no prato mais pesado. FIM.

Os casos possíveis são então:
Passo 1, Passo 5, Passo 6: 3 pesagens
Passo 1, Passo 5: Passo 6, Passo 7: 4 pesagens
Passo 1, Passo 5, Passo 8: 3 pesagens
Passo 1, Passo 5, Passo 8, Passo 9: 4 pesagens
Passo 1, Passo 2, Passo 3, Passo 4: 4 pesagens
Por este método consegue-se isolar a moeda falsa em 4 pesagens no máximo.

NOTA: por abuso de linguagem digo prato mais leve e mais pesado querendo significar o prato com o conjunto de moedas menos ou mais pesado.

Uma abordagem que parte do princípio que a moeda falsa é mais leve do que as restantes, devido a haver pouquíssimos metais mais densos do que o ouro (veja comentário de António Ferrão

[`http://problemasteoremas.wordpress.com/2008/05/14/moeda-falsa/#comment-253`]),

traduz-se, com uma forma de esquematização idêntica à de acima, em:

Faço as seguintes pesagens:

Passo 1 - coloco num dos pratos da balança as moedas do conjunto M_I e no outro as do M_{II}. Se a balança ficar em equilíbrio, a moeda falsa pertence ao conjunto M_{III}. Se desiquilibar a moeda falsa é uma das que está no prato mais leve.

Passo 2 - das nove moedas que incluem a falsa, escolho seis e coloco três em cada prato. Se a balança ficar equilibrada é porque uma das três restantes é falsa. Senão, é porque a moeda falsa está no prato mais leve.

Passo 3 - coloco uma do grupo das falsas em cada prato: se a balança ficar equilibrada a falsa é a que ficou de fora. FIM. Se não houver equilíbrio da balança, vejo qual dos pratos pesa menos: nele está a moeda falsa. FIM.

Estas 3 pesagens são suficientes para identificar a moeda falsa.

(Adaptado do comentário de Luisa Novo no post [`http://ferrao.org/2008/04/moeda-contrafeita.html`]:

« 3 pesagens no mínimo.
1^a em conjuntos de nove moedas em cada prato
2^a em conjuntos de 3 em cada prato
3^a uma em cada prato
Sempre que a balança equilibre com 2 conjuntos, a moeda falsa estará 3^o conjunto no grupo que ficou de fora. Cada vez que a balança desequilibrar a moeda estará no prato com menos peso. »)

Este método é generalizável a qualquer conjunto de 3^n moedas, em que apenas uma seja mais leve do que as restantes. São suficientes n pesagens para identificar a moeda contrafeita.

Neste post
[`http://www.smart-kit.com/s352/`
`good-math-mind-bender-which-coin-is-the-countefeit/`]
poderá encontrar, em inglês, um problema semelhante para 8 moedas.

Nesta entrada de António Chaves Ferrão

[`http://ferrao.org/2008/05/`
`amrico-tavares-moeda-contrafeita.html`]

poderá encontrar uma explicação sobre a ligação deste problema à teoria da informação de Shannon, e a consideração da possibilidade teórica de fabricar « uma moeda contrafeita por deposição electrolítica de uma camada externa de ouro num núcleo de volfrâmio. Como este metal possui a mesma massa volúmica que o ouro, fica aberta uma terceira hipótese, a de que a moeda contrafeita tenha o mesmo peso que as genuinas. O problema, colocado nestes termos, deixa de poder ser resolvido com recurso a uma balança. »

21.2. **Enigma dos produtos iguais. ENUNCIADO DO ENIGMA:**
A partir dos dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 constitua dois grupos de cinco dígitos todos diferentes entre si e disponha-os de modo a formar duas multiplicações cujo resultado seja igual.
Por exemplo

$$\square\,\square\,\square \times \square\,\square = \square\,\square\,\square \times \square$$

ou

$$\square\,\square\,\square \times \square\,\square = \square\,\square\,\square\,\square \times \square$$

em que cada dígito aparece uma e uma só vez.
Encontre o menor e o maior resultados possíveis e os respectivos factores.

Os leitores que o entendam, poderão apresentar-me a solução, se possível justificada, até 15 de Setembro de 2008 (com tolerância de duas semanas!), que publicarei.

Adaptado de [15, Enigma 90, Os Cubos Numerados], onde se encontra uma exposição mais desenvolvida e as duas respostas, mas não a sua justificação.

O leitor António Ferrão chegou à seguinte solução, quanto ao maior resultado possível do enigma a seguir enunciado:

$$915 \times 64 = 732 \times 80 = 58560$$

obtida através do programa escrito em PARI/GP indicado no **comentário 3**, que aqui reproduzo para o destacar e para uma visualização com indentação correcta de espaços (ver meu **comentário 5**).

Comentário 3:

Caro Américo Tavares

Eis os resultados que encontrei com a ajuda do pari-gp (great processor)

Expressões da forma:

x*y=z*w, sendo x e z dois números decimais de quatro dígitos e y e w dois números decimais de três dígitos.

Condição: nenhum dígito se pode repetir em qualquer posição dos quatro números: x,y,z e w.

A condição força a considerar todas as permutações dos dez dígitos, que se espalham entre os factores.

Número total de parmutações: 10!=3628800.

Resultados do programa para determinação do produto mais elevado:

[10, 2, 6, 7, 5, 8, 4, 3, 9, 1]

915*64=732*80=58560

Os dígitos dos factores são extraidos da permutação reduzindo uma unidade.

O programa fonte:

```
/* File produto.gp */
/* Resolucao de um problema de Americo Tavares
no blog problemas e teoremas */
maxprod=0;
for (i = 0, 10!-1,perm=numtoperm(10,i);\
x=(perm[1]-1)*100+(perm[2]-1)*10+(perm[3]-1);\
y=(perm[4]-1)*10+(perm[5]-1);\
w=(perm[6]-1)*100+(perm[7]-1)*10+(perm[8]-1);\
z=(perm[9]-1)*10+(perm[10]-1);\
p=x*y;\
q=w*z;\
```

```
if(p==q && p>maxprod,maxprod=p;\
permmax=perm;\
xmax=x;\
ymax=y;\
wmax=w;\
zmax=z;\
);\
);\
print(permmax);print(xmax,''*'',ymax,''='',wmax,''*'',zmax,''='',maxprod);\
quit;
```

Resultados do programa para determinação do produto mais baixo:
[9, 10, 8, 1, 5, 2, 6, 7, 3, 4]
897*04=156*23=3588

Fonte gp para a determinação do menor produto:

```
/* File produto.gp */
/* Resolucao de um problema de Americo Tavares
no blog problemas e teoremas */
minprod=9999*99;
for (i = 0, 10!-1,perm=numtoperm(10,i);\
x=(perm[1]-1)*100+(perm[2]-1)*10+(perm[3]-1);\
y=(perm[4]-1)*10+(perm[5]-1);\
w=(perm[6]-1)*100+(perm[7]-1)*10+(perm[8]-1);\
z=(perm[9]-1)*10+(perm[10]-1);\
p=x*y;\
q=w*z;\
if(p==q && p<minprod,minprod=p;\
permmin=perm;\
xmin=x;\
ymin=y;\
wmin=w;\
zmin=z;\
);\
);\
print(permmin);print(xmin,''*'',ymin,''='',wmin,''*'',zmin,''='',minprod);\
quit;\bigskip
```

Considerou «expressões da forma $x \times y = z \times w$, sendo x e z dois números decimais de quatro dígitos e y e w dois números decimais de três dígitos.

Condição: nenhum dígito se pode repetir em qualquer posição dos quatro números: x, y, z e w.

A condição força a considerar todas as permutações dos dez dígitos, que se espalham entre os factores.

Número total de permutações: $10! = 3628800$.

Resultados do programa para determinação do produto mais elevado:

$[10, 2, 6, 7, 5, 8, 4, 3, 9, 1]$

$915 \times 64 = 732 \times 80 = 58560$

Os dígitos dos factores são extraidos da permutação reduzindo uma unidade. »

e separadamente da forma «xe $w$com 5 dígitos e y e z com 1 dígito» que conduz a um resultado inferior.

Programa fonte para determinação do produto mais elevado

```
maxprod=0;
for (i = 0, 10!-1,perm=numtoperm(10,i);\
  x=(perm[1]-1)*100+(perm[2]-1)*10+(perm[3]-1);\
  y=(perm[4]-1)*10+(perm[5]-1);\
  w=(perm[6]-1)*100+(perm[7]-1)*10+(perm[8]-1);\
  z=(perm[9]-1)*10+(perm[10]-1);\
  p=x*y;\
  q=w*z;\
  if(p==q && p<maxprod,maxprod=p;\
   permmax=perm;\
   xmax=x;\
   ymax=y;\
   wmax=w;\
   zmax=z;\
  );\
 );\
 print(permmax);print(xmax,''*'',ymax,''='',wmax,''*'',zmax,''='',maxprod);\
quit;
```

Comentário 5

Caro António

O seu resultado do produto mais elevado $915 \times 64 = 732 \times 80 = 58560$ corresponde ao indicado pelo autor do livro.

Quanto ao menor, porque o autor parte do princípio de que o dígito da esquerda de cada um dos números não pode ser 0, coisa que não referi, chega a outro.

Isto é uma prova concreta de que, por vezes, não é fácil redigir enunciados curtos e 100% rigorosos.

Estou certo que poderia alterar o seu programa para incluir mais esta restrição, mas nem sequer acho de bom gosto pedir-lhe que o faça.

Mostrou dominar a programação e conseguir utilizar o pari-gp numa situação não trivial.

Só é pena que nos comentários se perca a indentação dos espaços, o que torna mais difícil a leitura do seu programa.

Penso conseguir neste post ou noutro separado melhorar este aspecto.

Muito obrigado pela sua resposta.

21.3. **Enigma, ou melhor, a falsa adivinha dos chocolates e da idade.** Do blogue *A Matemática anda por aí (29-11-2008)* [`http://amatematicaandaporai.blogspot.com/2008/11/tua-idade-com-chocolates.html`]

> «A TUA IDADE COM CHOCOLATES
>
> NÃO VÁS DIRECTAMENTE AO FINAL
>
> Não demora mais de um minuto.
>
> Faz os cálculos conforme vais lendo o texto...
>
> Não leias o final até que não acabes os cálculos.
>
> Não vais perder tempo, vais-te divertir.
>
> 1. Quantas vezes por semana te apetece comer chocolate? (deve ser um número maior que 0 vezes e menos de 10 vezes)
> 2. Multiplica este número por 2 (para ser par)
> 3. Soma 5
> 4. Multiplica o resultado por 50 – Vou esperar que ponhas a calculadora a funcionar
> 5. Se fizeste anos em 2008 soma 1758. Se ainda não fizeste anos soma 1757.
> 6. Agora subtrai o ano em que nasceste (número de quatro dígitos).
>
> O resultado é um número de três dígitos. O primeiro dígito é o número de vezes que te apetece comer chocolate por semana.
>
> Os dois números seguintes são...
>
> A TUA IDADE!!! (Siiiiiiimmmmmmm!!! A Tua Idade!!!)
>
> 2008 É O UNICO ANO, EM TODA A ETERNIDADE, EM QUE ISTO FUNCIONA.
>
> Quem consegue explicar isto?»

A minha resposta/explicação publicada no blog foi:

O resultado R é da forma $R = 100q + i$, em que q ($q = 1, 2, \dots, 9$) é o número de vezes que apetece comer chocolates numa semana e i a idade, que pode ser, designando o ano de nascimento por n, $2008 - n$ ou $2007 - n$, consoante se tenha já feito ou não anos em 2008.

Os passos enunciados conduzem, respectivamente, aos números

$$50(2q + 5) + 1758 - n$$

ou

$$50(2q + 5) + 1757 - n.$$

Ora as identidades

$$50(2q+5)+1758-n=100q+2008-n$$

e

$$50(2q+5)+1757-n=100q+2007-n$$

mostram que o número é da forma acima indicada e que a idade é efectivamente $i=2008-n$ ou $i=2007-n$.

Acrescento agora que a idade deve ser menor do que cem!

21.4. **Enigma: adivinha com números, cartas, cores (e base 2).** Do *A Matemática anda por aí*

http://amatematicaandaporai.blogspot.com/2008/12/magia-matemtica-adivinhar-um-nmero.html

« Pede-se a uma pessoa que pense num número natural menor ou igual a 60. De seguida pede-se que indique a cor das cartas onde esse número aparece. Adicionando o menor número de cada uma das cartas indicadas (ou seja, o número indicado no canto superior esquerdo) descobre-se o número pensado (por exemplo, se pensou no 38 ele aparece nas seguintes cartas: vermelha (2), azul escuro (4) e roxo (32); ora 2+4+32=38).

Verifica que resulta.

Porquê?

4	13	22	31	44	53
5	14	23	36	45	54
6	15	28	37	46	55
7	20	29	38	47	60
12	21	30	39	52	**

Carta azul escura

32	37	42	47	52	57
33	38	43	48	53	58
34	39	44	49	54	59
35	40	45	50	55	60
36	41	46	51	56	**

Carta roxa

8	13	26	31	44	57
9	14	27	40	45	58
10	15	28	41	46	59
11	24	29	42	47	60
12	25	30	43	56	**

Carta laranja

16	21	26	31	52	57
17	22	27	48	53	58
18	23	28	49	54	59
19	24	29	50	55	60
20	25	30	51	56	**

Carta azul clara

1	11	21	31	41	51
3	13	23	33	43	53
5	15	25	35	45	55
7	17	27	37	47	57
9	19	29	39	49	59

Carta verde

2	11	22	31	42	51
3	14	23	34	43	54
6	15	26	35	46	55
7	18	27	38	47	58
10	19	30	39	50	59

»

Carta vermelha

NOTA: SUGIRO QUE TENTE OBTER UMA EXPLICAÇÃO SEM LER A MINHA.

A minha resposta/explicação publicada no blog foi:

No canto superior esquerdo das cartas estão os números $1, 2, 4, 8, 16$ e 32, ou seja, as potências de base 2 e expoente, respectivamente, $0, 1, 2, 3, 4$ e 5.

Estes números só aparecem uma vez. Seja n um número natural qualquer inferior a 51. Este número n pode decompor-se numa soma das potências de 2 atrás referidas. À parte a ordem das parcelas, a decomposição é única. Começamos em n e subtraímos-lhe uma destas potências de 2, por exemplo, a maior que seja menor ou igual n. À diferença obtida fazemos o mesmo, até chegarmos a uma das potências colocadas no canto superior esquerdo das cartas. Por exemplo $n = 59$; calculamos sucessivamente

$$\begin{aligned} n - 32 &= 27, \\ 27 - 16 &= 11, \\ 11 - 8 &= 3, \\ 3 - 2 &= 1. \end{aligned}$$

Por isso, $n = 59 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1$. O que é feito neste jogo é colocar o 59 nas cores correspondentes ao 32 (roxo), 16 (azul claro), 8 (laranja), 2 (vermelho) e 1 (verde). E fazer o mesmo com todos os outros números. O número do exemplo do enunciado (38) respeita este critério:

$$\begin{aligned} 38 - 32 &= 6, \\ 6 - 4 &= 2, \\ 38 &= 32 + 4 + 2, \end{aligned}$$

aparecendo nas 3 cores indicadas. A propriedade comutativa da soma assegura que a ordem de escolha das potências é irrelevante.

Muito interessante, sem dúvida!

30 de Dezembro de 2008 22:52

A que acrescentei:

Vejo agora que *A Matemática anda por aí* no seu post logo a seguir

http://amatematicaandaporai.blogspot.com/2008/12/numerao-de-base-2.html
tem essencialmente a mesma resposta!

30 de Dezembro de 2008 23:34

21.5. **Enigma lógico com casas, pessoas, animais, . . .** Arrumando papéis descobri uma folha com umas notas escritas por mim, na década de 1970, sobre um enigma do qual tomei conhecimento na altura, e que recentemente vi publicado na Internet, numa forma que não verifiquei se correspondia ao mesmo enunciado ou se era uma variante.

A lista de perguntas e a solução são as que tenho na minha folha. Apenas a inicio com o próximo parágrafo, que só agora escrevi.

Em cinco casas de cores diferentes situadas ao lado umas das outras, moram cinco pessoas. Cada uma tem nacionalidade, idade, profissão e animal de estimação diferentes, e nenhuma das bebidas que tomam é a mesma. Indicar para cada pessoa: a cor e ordem da casa, o animal de que é dono, a respectiva nacionalidade, profissão, idade e o que bebe.

1 - o sexagenário da casa azul detesta a tartaruga da casa ao lado;
2 - a pomba do polaco é muito bem tratada pelo seu dono;
3 - ontem o metalúrgico discutiu com o dono do cão que mora na casa ao lado, e apareceu o polícia da casa verde, que resolveu o assunto;
4 - o chileno mora na casa branca;
5 - bebe-se vinho na casa à direita da qual se guarda a pomba;
6 - o velho da primeira casa à esquerda bebe café;
7 - o cão do advogado brasileiro enfurece-se facilmente;
8 - na casa do meio bebe-se leite;
9 - guarda-se o peixe, ao lado da casa verde;
10 - o jovem que bebe whisky tem uma vida muito agitada;
11 - a casa azul fica à direita da casa amarela;
12 - o homem de meia-idade é vizinho do velho do gato;
13 - bebe-se chá ao lado da casa branca;
14 - o dono da casa azul é pescador;
15 - a casa vermelha é a mais próxima da casa branca;
16 - o americano mora ao lado do chinês; e
17 - o trintão não é vizinho do agricultor.

Solução não justificada:

A cor da casa da esquerda para a direita, nacionalidade, profissão, idade, bebida e animal de estimação são:
1. Branca: chileno, agricultor, velho, café e gato.
2. Vermelha: brasileiro, advogado, meia-idade, chá e cão.
3. Amarela: polaco, metalúrgico, trintão, leite e pomba.
4. Azul: chinês, pescador, sexagenário, vinho e peixe.
5. Verde: americano, polícia, jovem, whisky, tartaruga.

Referências

[1] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque **61** 1979, 11-13.
[2] A. van der Poorten, *A Proof that Euler Missed..., Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. *An informal report,* Math. Intelligencer **1**, n^o 4, 1978/79, pp. 195-203. `http://www.ift.uni.wroc.pl/~mwolf/Poorten_MI_195_0.pdf` `http://ega-math.narod.ru/Apery1.htm`
[3] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. Lond. Math. Soc. **11**, n^o 33, 1978, pp. 268-272
[4] F. Apéry, *Roger Apéry, 1916-1994: A Radical Mathematician*, Math. Intelligencer **18**, n^o 2, 1996, pp. 54-61.
[5] M. Petkovsek, H. Wilf and D. Zeilberger, *A=B*, 1997. `http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.htm.`
[6] V.K., Md. Balakrishnan, V. Balakrishnan, *Combinatorics,* Schaum's Outline of Combinatorics.
[7] Lino Costa, Métodos Numéricos I, Licenciatura em Informática de Gestão da Universidade do Minho, 2005/2006.
[8] P. Davis e Reuben Hersh, A Experiência Matemática, Gradiva, Lisboa, 1995.
[9] Apostol, Tom, *Mathematical Analysis,* 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1974.
[10] Greenberg, Michael, *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd. ed., Prentice Hall, New Jersey, 1998.
[11] Riggs, J., Bedworth, D., Ranhawawa, S., *Engineering Economics*, 4th ed., New York, The McGraw-Hill Companies, 1996.
[12] Ferreira, Jaime Campos, *Curso de Matemáticas Gerais*, IST, Ed. Secção de Folhas da AEIST, 1968-69.
[13] Sarrico, Carlos, *Análise Matemática*, *Leituras e exercícios*, 3^a ed., Gradiva, Lisboa, 1999.
[14] Taylor, Angus, *Advanced Calculus*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1955
[15] Dudeney, Henry, *Os Enigmas de Canterbury*, Biblioteca Desafios Matemáticos, RBA, 2008 (título original: *The Canterbury Puzzles*)

Queluz, Portugal
Current address: Américo Tavares, Queluz, Portugal
E-mail address: `acltavares@sapo.pt`
URL: `http://www.problemasteoremas.wordpress.com`