Fonte: GCSE Edexcel Maths Paper 1 – The Final Question [1]

Tradução do enunciado. A figura 1 representa três círculos de 4 cm de raio cada. Os centros dos círculos são os pontos A, B e C tais que ABC é uma linha recta e $AB = BC = 4$ cm. Calcule a área total das duas regiões sombreadas. Apresente a sua resposta em termos de π.

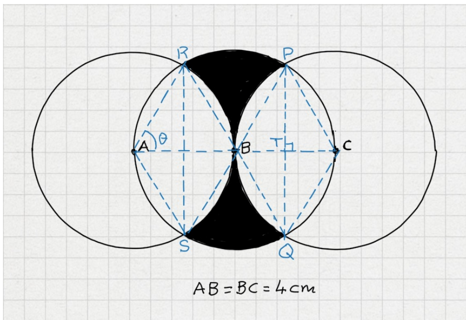

Figure 1: Três círculos de de 4 cm de raio do enunciado

Possível resolução. Designemos a área da região sombreada por A. Ora

$$A = \pi r^2 - 4A_{\text{seg.circ.}}$$

em que $A_{\text{seg. circ.}}$ é a área de um segmento de um círculo de raio $r = 4$ cm e ângulo ao centro $\theta = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad. Para calcular esta área, determinamos primeiro a área $A_{\text{seg. circ.}}$ de um sector de círculo de raio $r = 4$ cm e ângulo ao centro $\theta = \frac{2\pi}{3}$ rad, retirando-lhe depois a área $A_{\triangle\text{PQC}}$ do triângulo PQC (da segunda figura), em que P é o ponto intersecção de duas circunferências concorrentes, por exemplo a do meio e a da direita e Q é o ponto simétrico de P na vertical. Então,

$$A_{\text{sec.circ.}} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{16\pi}{3}\,\text{cm}^2$$

Seja T o ponto equidistante de B e C. Mas como a área do triângulo rectângulo PTC (rectângulo em T, base $b = 2$ cm e altura $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$cm) é

$$A_{\triangle\text{PTC}} = \frac{bh}{2} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = \frac{A_{\triangle\text{PQC}}}{2}$$

a área $A_{\text{seg.circ.}}$ vem

$$A_{\text{seg.circ.}} = A_{\text{sec.circ.}} - A_{\triangle\text{PQC}} = A_{\text{sec.circ.}} - 2 \times A_{\triangle\text{PTC}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

[1] `https://twinklsecondary.blog/gcse-edexcel-maths-paper-1-the-final-question`

Donde a área pedida será

$$
\begin{aligned}
A &= \pi r^2 - 4A_{\text{seg.circ.}} \\
&= 16\pi - 4\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) \\
&= -\frac{16}{3}\pi + 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

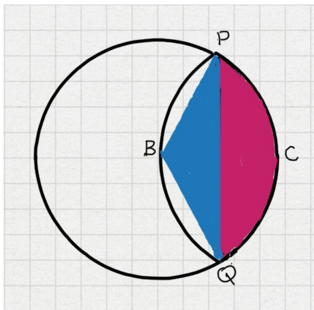

Figure 2: Sector circular e segmento de círculo (vermelho)

Maio 2022
Américo Tavares